

# Estudio de la exactitud del modelo hiperbólico de Duncan y Chan en la predicción de la relación esfuerzo deformación de tres suelos arcillosos cubanos

## *Study of the accuracy of Duncan and Chan hyperbolic model in the prediction of the stress strain relationship of three Cuban clay soils*

Miguel Herrera Suárez<sup>1</sup>; Omar González Cueto<sup>2</sup>; Ciro Iglesias Coronel<sup>3</sup>; Alain de La Rosa Andino<sup>4</sup>  
y Ramón Madruga Hernández<sup>5</sup>

**RESUMEN.** El método de elementos finitos (MEF) ha sido ampliamente utilizado en la simulación de la respuesta mecánica del suelo. El núcleo central del soporte matemático que sustenta este método lo representan los modelos constitutivos, dentro de estos, el de Duncan y Chan es uno de los más utilizados, por lo que el presente trabajo tiene como objetivo determinar la exactitud en la predicción de la relación esfuerzo-deformación de tres suelos arcillosos cubanos (Oxisol; Inceptisol; Vertisol). Para cumplimentar dicho objetivo se determinan las propiedades mecánicas de los suelos y se implementan las ecuaciones constitutivas en el software Mathcad 14. Los resultados muestran que el modelo posee una gran capacidad para predecir con exactitud la relación esfuerzo-deformación de los suelos estudiados, cuando exhiben una falla plástica, sin embargo cuando el suelo falla de forma frágil, el modelo muestra incapacidad para predecir los cambios de tensiones originadas producto de la deformación por ablandamiento o endurecimiento.

**Palabras clave:** Modelos constitutivos; mecánica de suelos; dinámica de suelos; propiedades mecánicas; suelo.

**ABSTRACT.** The finite elements method has been widely used in the simulation of the soil mechanical response. The constitutive models are the mathematical support core of this method and Duncan and Chan's is one of the most used. Therefore, the aim of this paper is to determine accuracy in the prediction of three Cuban clay soils' relationship strain vs. deformation. The soils mechanical properties are determined and the constitutive equations are made in the software Mathcad 14 to accomplish this goal. The results show the model has a large capacity to predict accurately the relationship strain vs. deformation of these soils when there is a plastic failure. However, the model is not able to predict the tensions changes caused by softening or hardening deformations.

**Keywords:** Constitutive models; soil mechanics; soil dynamics; mechanical properties; soil.

## INTRODUCCIÓN

La incorporación del método de elementos finitos a la solución de problemas de la dinámica y mecánica de suelos, como es el caso de la interacción suelo-herramienta y neumá-

tico-suelo, ha posibilitado la búsqueda de soluciones a estos problemas mediante la simulación computacional.

El núcleo o centro de los modelos matemáticos que soportan este método numérico está conformado por los modelos constitutivos, los cuales expresan mediante relaciones mate-

**Recibido** 02/08/09, aprobado 22/09/10, trabajo 50/10, investigación.

<sup>1</sup> Dr. C., Prof. Titular, Universidad Central de Las Villas, Dpto. Mecanización Agropecuaria, Villa Clara, CP 54830. E-✉: [miguelhs@uclv.edu.cu](mailto:miguelhs@uclv.edu.cu)

<sup>2</sup> MSc., Prof. Auxiliar, Universidad Central de Las Villas, Dpto. Mecanización Agropecuaria, Villa Clara, CP 54830.

<sup>3</sup> Dr.C., Prof. e Inv. Titular, Universidad Agraria de La Habana-CEMA, La Habana. CP: 32700.

<sup>4</sup> Ing. Prof. Asistente, Universidad de Granma, Dpto. de Ciencias Técnicas, Granma.

<sup>5</sup> Ing., Prof. Asistente, Universidad Central de Las Villas, Dpto. Mecanización Agropecuaria, Villa Clara. CP 54830.

máticas las distintas leyes del comportamiento material del suelo.

Para la simulación de la respuesta mecánica del suelo se han desarrollado varios modelos constitutivos que muestran el suelo como un material no lineal, elástico o elastoplástico. Dentro de estos los que mayor utilización han alcanzado se destacan: el modelo no lineal elástico de Duncan y Chan (1970); los modelos elastoplástico de Drucker y Prager (1952), (extendido y modificado); Cam Clay o Cambridge desarrollados por Roscoe *et al.* (1958) y posteriormente modificado por (Roscoe y Burland (1968). Se le suma el modelo elastoplástico de Lade, (1977) y el modelo plástico de Bailey *et al.* (1984).

Dentro de estos modelos el de Duncan y Chan es el que mayor utilización ha alcanzado en la simulación de la interacción suelo-apero de labranza (Young y Hanna, 1977; Xie, 1983; Bailey, 1984; Chi y Kushawaha, 1989; Chi, 1990; Chi y Kushawaha, (1990; Chi y L., 1991; Kushawaha y Shen, 1995; Rosa y Wulfsoh, 1999). Pues el mismo cumple con los requisitos propuestos por Chi y Kushawaha (1993), para la selección de los modelos constitutivos, es decir: sencillez; posibilidad de determinación de los parámetros en el laboratorio y conveniencia de implementación.

Este modelo ha sido utilizado con éxito en suelos arenosos, arcillosos y loamosos, exhibiendo gran capacidad de predecir con exactitud la relación esfuerzo deformación del suelo cuando presenta una falla plástica, sin embargo su principal limitación consiste en la incapacidad de predecir los cambios de tensiones producto de la deformación por ablandamiento o endurecimiento. Según Chi y Kushawaha (1988), una deficiencia de este modelo es la naturaleza monótona de la función una vez que las tensiones se incrementan con el incremento de las deformaciones.

En Cuba existe una gran variedad de suelos de marcada importancia agrícola, siendo los suelos arcillosos los que ocupan una mayor extensión territorial. Tomando en cuenta este aspecto y las ventajas que presenta el modelo constitutivo de Duncan y Chan para la simulación de la respuesta mecánica del suelo, se decide desarrollar el presente trabajo que tiene como objetivo: determinar la exactitud en la predicción de la relación esfuerzo-deformación de tres suelos arcillosos cubanos (Oxisol; Inceptisol; Vertisol).

### Fundamentación Teórica del Modelo

El modelo hiperbólico fue propuesto inicialmente por Konder y Zelasko (1963ab), posteriormente fue presentado en forma incremental por Duncan y Chan (1970). El mismo parte del presupuesto de que las curvas esfuerzo-deformación del suelo pueden aproximarse a una hipérbola, cuya ecuación, es:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon} \quad (1)$$

donde:

$\sigma_1 - \sigma_3$  - esfuerzo desviador, kPa;

$\varepsilon$  - deformación axial unitaria, adimensional;

a y b - parámetros determinados experimentalmente, adimensionales.

Según Chi y Kushawaha (1988), los parámetros a y b tienen un significado físico, pues el parámetro a es el inverso del módulo tangente inicial ( $E_i$ ), y el parámetro b, es el inverso del esfuerzo desviador último ( $\sigma_1 - \sigma_{3ult}$ ). Posteriormente Konder y Zelasko (1963a), demostraron que los valores de a y b se pueden determinar transformando la curva esfuerzo-deformación. En este caso la ecuación que describe la transformada se escribe, como:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_1 - \sigma_3} = a + b\varepsilon \quad (2)$$

Comúnmente los valores de ( $\sigma_1 - \sigma_{3ult}$ ) son ligeramente mayores que el esfuerzo desviador de falla ( $\sigma_1 - \sigma_{3f}$ ), estos valores se pueden relacionar mediante el factor de falla ( $R_f$ ), el cual se determina, como:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (3)$$

El factor de falla siempre es menor que la unidad, según Duncan y Chan (1970), los valores oscilan entre 0,75 y 1, independientemente del tipo de suelo y la presión de confinamiento. Sin embargo Armas (1979), encontró valores que oscilaron entre 0,4 y 1, dependientes de la presión de confinamiento, pues los menores valores correspondieron a la presión de confinamiento ( $\sigma_3$ ) más pequeña.

Duncan y Chan (1970), desarrollaron una ecuación del módulo tangente del suelo para el cálculo incremental durante un análisis no lineal del suelo, dicha relación es:

$$E_t = E_i \left( \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2C \cos \phi + 2(\sigma_3 + Pa) \sin \phi} \right) \quad (4)$$

donde:

$E_t$  - módulo tangente del suelo;

$E_i$  - módulo tangente inicial;

C - cohesión;

$\phi$  - ángulo de fricción interna;

$R_f$  - factor de falla;

$\sigma_3$  - presión de confinamiento;

Pa - presión atmosférica.

El módulo tangente inicial fue propuesto por Jambu (1963), como una función de las tensiones principales menores, el mismo es dado por:

$$E_i = KPa \left( \frac{(\sigma_3 + Pa)}{Pa} \right)^n \quad (5)$$

donde:

K, n - Parámetros adimensionales que se determinan experimentalmente.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Determinación experimental de los parámetros del modelo

La determinación experimental de los parámetros del modelo Duncan y Chan (1970), se realizó para tres suelos arcillosos cubanos Oxisol, Inceptisol y Vertisol, según USDA

Soil Taxonomy (*Keys to soil taxonomy*, 2010). Estos suelos se clasifican como Ferralítico; Pardo Sialítico; Vertisol, según la nueva Clasificación de Suelos en Cuba (1999). Los mismos fueron acopiados en localidades de la región Centro-Occidental de Cuba. El suelo Ferralítico se recolectó en las áreas experimentales del Instituto Nacional de Ciencias Agrícolas de la Universidad Agraria de La Habana, municipio San José de Las Lajas en la provincia La Habana, el suelo Pardo Sialítico

co se acopió en las áreas de la Estación Experimental Alvaro Barba de la Universidad Central de Las Villas en la provincia Villa Clara, y el Vertisol se recolectó en el campo 55 del bloque 1, dentro de las áreas de producción del Complejo AgroIndustrial Azucarero “Batalla de Santa Clara”, en las zonas del macizo cañero de la Costa Norte, municipio Camajuaní, provincia Villa Clara. Las características físicas estos suelos se muestran en la Tabla. 1.

**TABLA 1. Características físicas de los suelos objeto de estudio**

Tipo de Suelo	Profundidad, cm		Gs, g/cm <sup>3</sup>	Límites de consistencia, %			Granulometría, %		
	Desde	Hasta		LP	LL	IP	Arena	Limo	Arcilla
<b>Vertisol</b>			2,62	23,83	79,87	56,03	4,33	23,33	72,00
<b>Ferralítico</b>	0	50	2,67	30,03	65,67	35,60	18,33	40,67	41,00
<b>Pardo Sialítico</b>			2,62	21,47	70,10	48,63	7,00	28,33	65,00

La determinación experimental de los parámetros del modelo se realizó en el Laboratorio de Mecánica de Suelos de la Empresa de Investigaciones Aplicadas a la Construcción (ENIA-VC), en los meses de enero a marzo del año 2010.

Se recurrió al empleo del ensayo de compresión triaxial, rápido, no drenado, como método para la determinación de las propiedades y parámetros del suelo. Las probetas o muestras se obtuvieron por el método de remoldeo. El equipamiento y los métodos para la preparación del suelo y realización del ensayo han sido ampliamente descrito por Herrera *et al.* (2008a y 2008b).

Se fijaron dos condiciones de humedad y densificación del suelo (nivel alto y bajo), de modo tal que se garantice la validez de los modelos con independencia de las condiciones del suelo, Tabla 2. Se emplearon cuatro presiones de cámara o confinamiento (0,35; 0,50; 0,75; 1 kPa), para cada tipo de suelo y condición de humedad. La velocidad del ensayo fue de 1,25 mm/s.

**TABLA 2. Condiciones del suelo investigado**

Tipo de Suelo	W, %	$\gamma_d$ , g/cm <sup>3</sup>
<b>Vertisol</b>	26,9	1,049
	51,2	1,20
<b>Ferralítico</b>	20,4	0,96
	40,5	1,09
<b>Pardo Sialítico</b>	20,0	1,22
	35,3	1,25

El procesamiento estadístico de los resultados se realizó mediante un análisis de correlación, con ayuda del procesador estadístico STATGRAPHICS Centurión XV.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Resultados de la predicción de la relación esfuerzo-deformación del suelo con el modelo hiperbólico de Duncan y Chan

La relación esfuerzo-deformación del suelo fue transformada (Figura 1), demostrándose que la misma no es lineal para valores bajos y altos de la deformación axial. Durante la determinación de los coeficientes a y b que permiten transformar la relación en una hipérbola se evaluaron cuatro procedimientos. El primero consistió en ajustar la transformada en tres puntos, correspondientes a:  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0$ ;  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0,70 \cdot \sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$ ;  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0,95 \cdot \sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$ , pues según Armas (1978), a pesar de la no linealidad de la transformada en estos tres puntos la curva puede ajustarse a una hipérbola. El segundo procedimiento (Full), consistió en ajustar la curva tomando en cuenta todos los valores obtenidos experimentalmente (Chi y Kushawaha, 1988). El tercero consideró el ajuste de la curva en dos puntos  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0,70$  y  $\sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$ ;  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0,95 \cdot \sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$ , el cuarto procedimiento comprendió el ajuste de la transformada incluyendo hasta un 10% de los valores superiores a la  $\sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$  (%  $\sigma_1 - \sigma_{3\text{máx}}$ ).

El procedimiento empleado en la determinación de los coeficientes (a y b), que posibilitó la estimación más exacta de la hipérbola durante la estimación de la relación esfuerzo-deformación del suelo, fue el método cuatro, (Figura 2). El coeficiente de correlación entre los valores observados experimentalmente y los predichos por la ecuación fue de 0,93. Resultados muy si-

milares se obtuvieron con el método empleado por Chi y Kushawaha (1988). Las predicciones menos exactas se obtuvieron con los procedimientos tres y dos, mostrando valores del coeficiente de correlación de 0,77 y 0,73, respectivamente. Estos resultados contradicen los obtenidos por Armas (1978).

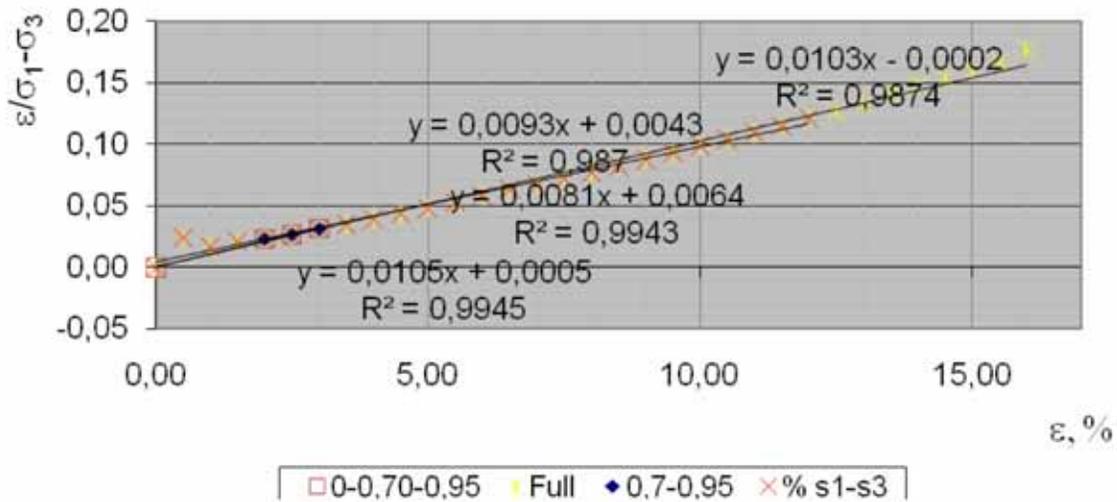


FIGURA 1. Relación esfuerzo-deformación de suelo transformada.

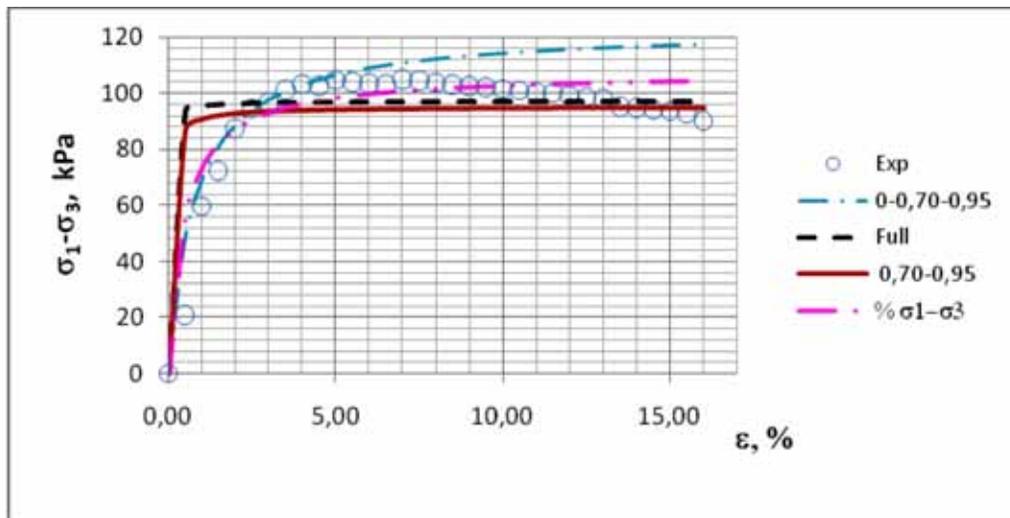


FIGURA 2. Exactitud en predicción de la curva esfuerzo-deformación para los diferentes métodos de ajuste de la transformada.

El análisis de la exactitud en la predicción de la relación esfuerzo-deformación del suelo mediante el modelo hiperbólico mostró, que es menos exacto en las predicciones cuando el suelo muestra una falla frágil, es decir cuando posee un punto de falla bien definido a partir del cual se deforma por ablandamiento. Esto se debe a que en estos casos la curva esfuerzo-deformación obtenida experimentalmente dista mucho de ser un hipérbola, los coeficientes de correlación obtenidos en este análisis fueron de 0,88 y 0,86, correspondientes a los suelos ferralíticos y pardos cuando poseen un bajo contenido de humedad, (Figura 3). Cuando el suelo mostró una falla plástica (Vertisol), el coeficiente de correlación entre los resultados observados y predichos alcanzó valores de 0,94, independientemente del contenido de humedad presente en el suelo.

Para el caso de valores altos de humedad en los suelos investigados, el modelo hiperbólico predice con mayor exactitud la relación esfuerzo-deformación, producto de que en todos los casos el suelo falla de forma plástica (Figura 4). La mayor exactitud en las predicciones se encontró para los suelos Ferralítico y Vertisol, con un coeficiente de correlación de 0,98 y 0,94, respectivamente. En el caso del suelo Pardo Sialítico el coeficiente de correlación fue solamente de 0,64.

En ambas condiciones de suelo se pone de manifiesto el carácter monótono creciente de la función hiperbólica observado por Chi y Kushawaha (1988), lo cual causa inexactitudes en las predicciones, cuando después de la falla el suelo comienza a deformarse por ablandamiento.

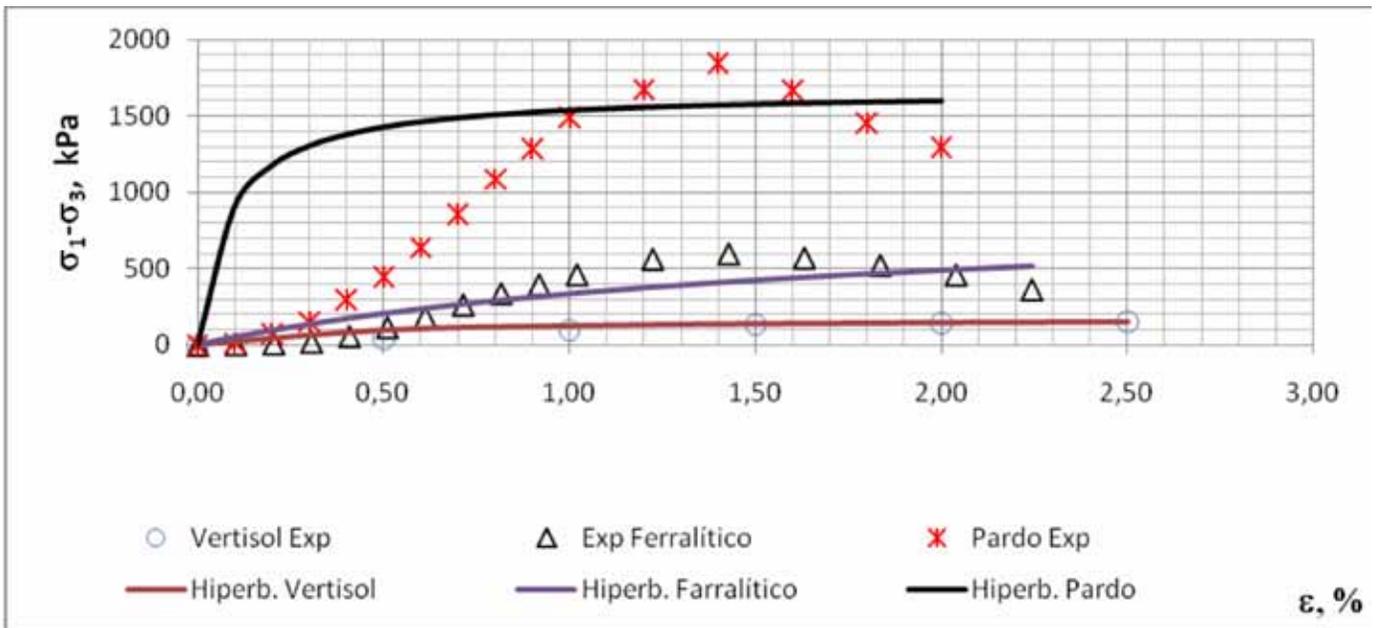


FIGURA 3. Predicción de la relación esfuerzo-deformación condición de suelo seco.

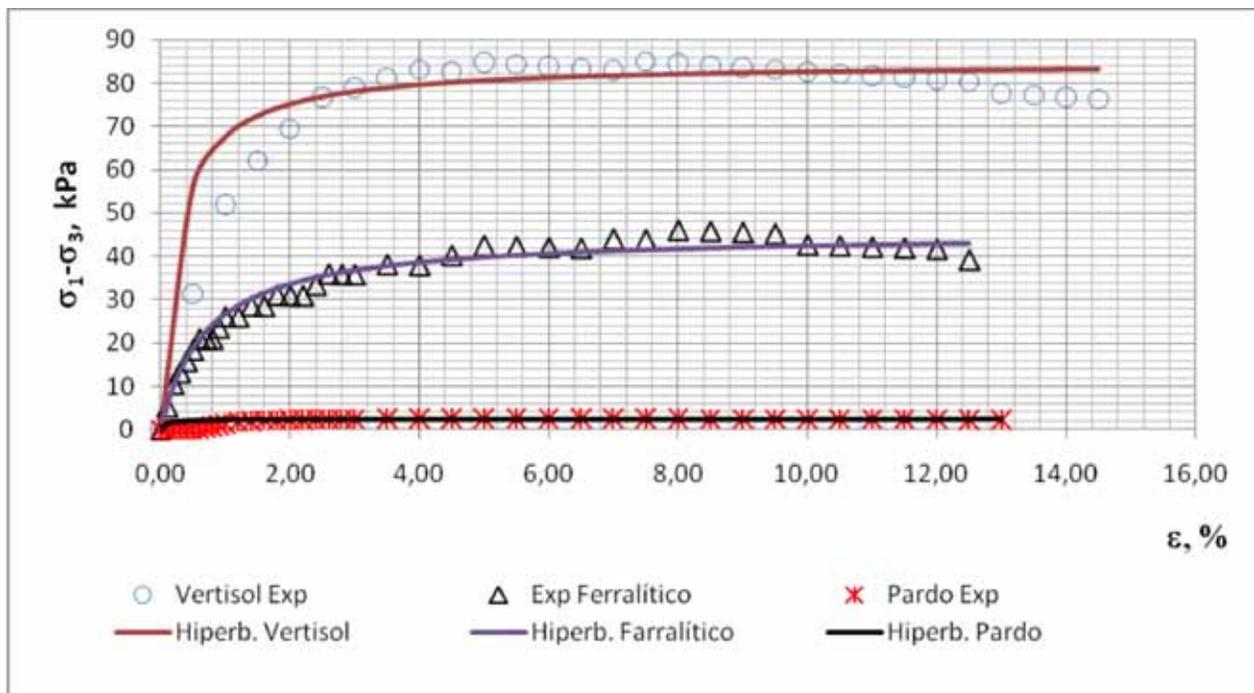


FIGURA 4. Predicción de la relación esfuerzo-deformación condición de suelo húmedo.

## CONCLUSIONES

- El ajuste de la transformada tomando en cuenta valores de tensiones superiores al 10% del esfuerzo desviador máximo, es el método más adecuado para la determinación de los coeficientes a y b del modelo hiperbólico;
- El modelo hiperbólico de Duncan y Chan es capaz de predecir con exactitud la relación esfuerzo-deformación de los suelos objeto de estudio cuando estos presentan una falla plástica, sin embargo cuando estos exhiben una falla rígida las predicciones no poseen la exactitud requerida;
- El carácter monótono creciente de la función hiperbólica imposibilita al modelo la predicción del estado tensional del suelo durante la deformación por ablandamiento;
- La exactitud en las predicciones del modelo no está relacionada con el contenido de arcilla y humedad de los mismos, si no con la forma de la curva esfuerzo-deformación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARMAS NOVOA, R.: "Parámetros experimentales para un análisis de elementos finitos", *Revista de Ingeniería Civil*, 5: 343-363, 1979.
- ARMAS NOVOA, R.: *Propiedades ingenieriles del suelo compactado: Laterita. Tesis (en opción al título de Especialista), Instituto Superior Politécnico, José A. Echeverría (ISPJAE), La Habana, Cuba, 1978.*
- BAILEY, A.C.; JOHNSON, C.E. Y SCHAFER, R.L.: "Hydrostatic compaction of agricultural soils", *Transactions of the ASAE*, 27(4): 952-955, 1984.
- CHI, L.: "Finite element analysis of soil forces on two tillage tools", *Canadian Agric. Eng.*, 33: 39-45, 1990.
- CHI, L. and KUSHAWAHA, R. L.: "An elastoplastic constitutive model for agricultural cohesive soil", *Canadian Agricultural Engineering*, 35(4): 245-251, 1993.
- CHI, L. and KUSHAWAHA, R. L.: Finite element analysis of forces on a plane soil blade. *Canadian Agricultural Engineering*, 31: 135-140, 1989.
- CHI, L. and KUSHAWAHA, R. L.: "A non-linear 3d finite element analysis of soil failure with tillage tools", *J. Terramech.*, 27(4): 343-366, 1990.
- CHI, L. and KUSHAWAHA, R. L.: *Study of mechanical properties of agricultural soil for non-linear f.E. Model*, In: **International Winter Meeting of the American Society of Agricultural Engineers**, Hyatt Regency Chicago in Illinois Center, December 13-16, 1988.
- CHI, L. and L., K. R.: Three dimensional finite element interactions between soil and a simple tillage tool. *Transactions of the ASAE*, 34(2): 3623-3626, marzo-abril, 1991.
- DRUCKER, D. C. and Q. PRAGER: "Appl. Math. Soil mechanics and plastic analysis or limit designs", 10(2): 157-165, 1952.
- DUNCAN, J. M. and Y. CHAN: "Non linear analysis of stress and strain in soil", Division: American society of Civil Engineers, *J. of Soil Mech. and Foundations*, 96(SM): 1629-1653, 1970.
- HERRERA SUÁREZ, M.; C. IGLESIAS, O. GONZÁLEZ, E. LÓPEZ Y A. SÁNCHEZ: "Propiedades mecánicas de un rhodic ferralsol requeridas para la simulación de la interacción suelo implemento de labranza mediante el método de elementos finitos: Parte II Interfase suelo-herramienta", *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 17(4): 50-54, 2008a.
- HERRERA SUÁREZ, M.; C. IGLESIAS, O. GONZÁLEZ, E. LÓPEZ Y A. SÁNCHEZ: "Simulación mediante el método de elementos finitos de la respuesta mecánica de un oxisol", *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 16(2): 55-61, 2008b.
- JAMBU, N.: Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial test, In: **European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, pp. 19-25, Wiesbaden, Germany, 1963.
- Keys to soil taxonomy*, Soil Survey Staff, 346pp., USDA-Natural Resources Conservation Service, 11th. Washinton, DC., 2010.
- KONDER, R. L. and S. ZELASKO: A hyperbolic stress-strain formulation for sands. In: **2nd Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, pp. 289-324, Brazil. 1963a.
- KONDER, R. L. and S. ZELASKO: "A hyperbolic stress-strain response: Cohesive soil", Division: American society of Civil Engineers, *J. of Soil Mech. and Foundations.*, 89(SM1): 115-143, 1963b.
- KUSHAWAHA, R. L. and SHEN, J.: "Finite element analysis of the dynamic interaction between soil and tillage tool", *Transactions of the ASAE*, 37(5): 1315-1319, noviembre-diciembre, 1995.
- LADE, P. V.: "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *Int. J. solids and Structure*, 13: 1019-1035, 1977.
- Nueva versión de clasificación genética de los suelos de cuba: Suelos*, 35pp., MINAG, I. D., La Habana, Cuba.. 1999.
- ROSA APARECIDO, U. and WULFSOH, D.: "Constitutive model for high speed tillage using narrow tools", *Journal of Terramechanics*, 36: 221-234, 1999.
- ROSCOE, K. H. and BURLAND, J. B.: *On the generalized stress-strain behavior of wet clay*, pp. 535-609, In: Engineering plasticity, J. Heyman and F. Leckie, E. Cambridge, England. 1968.
- ROSCOE, K.H.; SCHOFIELD, A.N. Y WROTH, C.P.: "On the yielding of soils", *Geomechnique*, 8(1): 22-53, 1958.
- Xie, X.: "Nonlinear finite element analysis of two-dimensional cutting problems in agricultural soils", *Transaction of Chinese Society of Agricultural Machinery*, 1: 73-82, 1983.
- YOUNG, R. N. Y HANNA, A. W.: "Finite element analysis of plane soil cutting", *J. Terramech.*, 1977, vol. 14, n° 3, p. 103-125.