



<https://eqrcode.co/a/J63bGW>

SOFTWARE

Model and Software for the Parameters Calculation in Centrifugal Disk of Fertilizer Spreaders

Modelo y software para el cálculo de parámetros en discos centrífugos esparcidores de fertilizante

Dr.Cs. Arturo Martínez-Rodríguez¹, MSc. María Victoria Gómez-Águila¹, MC. Martín Soto Escobar¹

¹ Universidad Agraria de La Habana (UNAH), Facultad de Ciencias Técnicas, Centro de Mecanización Agropecuaria (CEMA), San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba.

¹ Universidad Autónoma Chapingo, Texcoco, Edo. México, Estados Unidos Mexicanos.

ABSTRACT. On an international scale, the broadcast distribution of mineral fertilizers is carried out fundamentally with the use of centrifugal disk spreaders with blades, due to their high distribution capacity and their constructional and operational simplicity. In spite of these advantages, a high demand in the correct selection of the parameters of the working process of these organs is required, to guarantee a high uniformity of fertilizer distribution in the field and consequently, the corresponding productive requisites. A model to determine the characteristics of the movement of the fertilizer particles on the spreading disk with inclined blades in relation to the radial direction is presented in this work. The analysis was carried out by obtaining the differential equation of the dynamics of a particle's motion by applying the laws of classical Newtonian mechanics. The equations obtained from the solution of the differential equation of motion were programmed using the Mathcad software, version 2000 Professional. It allowed evaluating the model with specific data and obtaining the output speed and angle of the fertilizer based on parameters of input such as: inclination angle of blades, coefficient of friction between the fertilizer and the disk and blades material, dimensions and rotation speed of the disk and coordinates of the zone of the fertilizer fall from the mouth of the hopper.

Keywords: Inclined blades, Distribution Uniformity, Mathcad Software.

RESUMEN. A escala internacional, la distribución a voleo de fertilizantes minerales se efectúa fundamentalmente con el empleo de esparcidores centrífugos de disco con paletas, debido a su alta capacidad de distribución, acompañado de simplicidad constructiva y de operación. No obstante, estas ventajas, se requiere una alta exigencia en la correcta selección de los parámetros que intervienen en el proceso de trabajo de estos órganos, como requisito fundamental para garantizar una alta uniformidad de distribución del fertilizante en el campo, que garantice los requerimientos productivos correspondientes. En el presente trabajo se presenta un modelo que ha sido elaborado con vistas a determinar la característica del movimiento de las partículas de fertilizante sobre el disco esparcidor dotado de paletas inclinadas con relación a la dirección radial. El análisis se realiza obteniendo la ecuación diferencial de la dinámica del movimiento de una partícula mediante la aplicación de las leyes de la mecánica clásica newtoniana. Las ecuaciones obtenidas de la solución de la ecuación diferencial del movimiento son programadas empleando el software Mathcad, versión 2000 Professional, lo cual posibilita evaluar el modelo con datos concretos y obtener como salida, la velocidad y ángulo de salida del fertilizante en función de parámetros de entrada tales como: el ángulo de inclinación de las paletas, el coeficiente de fricción entre el fertilizante y el material del disco y las paletas, las dimensiones y velocidad de rotación del disco y las coordenadas de la zona de caída del fertilizante desde la boca de la tolva.

Palabras clave: Paletas inclinadas, uniformidad de distribución, software Mathcad.

¹ Author for correspondence: Arturo Martínez-Rodríguez, e-mail:

Received: 20/06/2020.

Approved: 04/12/2020.

INTRODUCTION

On an international scale, the broadcast distribution of mineral fertilizers is carried out fundamentally with the use of centrifugal disc spreaders with blades (Fig. 1), due to their high distribution capacity and their constructional and operational simplicity. In spite of these advantages, a high demand in the correct selection of the parameters of the working process of these organs is required, to guarantee a high uniformity of fertilizer distribution in the field and consequently, the corresponding productive requisites

INTRODUCCIÓN

A escala internacional, la distribución a voleo de fertilizantes minerales se efectúa fundamentalmente con el empleo de esparcidores centrífugos de disco con paletas (Fig. 1), debido a su alta capacidad de distribución, acompañado de simplicidad constructiva y de operación. No obstante, estas ventajas, se requiere una alta exigencia en la correcta selección de los parámetros que intervienen en el proceso de trabajo de estos órganos, como requisito fundamental para garantizar una alta uniformidad de distribución del fertilizante en el campo, que garantice los requerimientos productivos correspondientes.

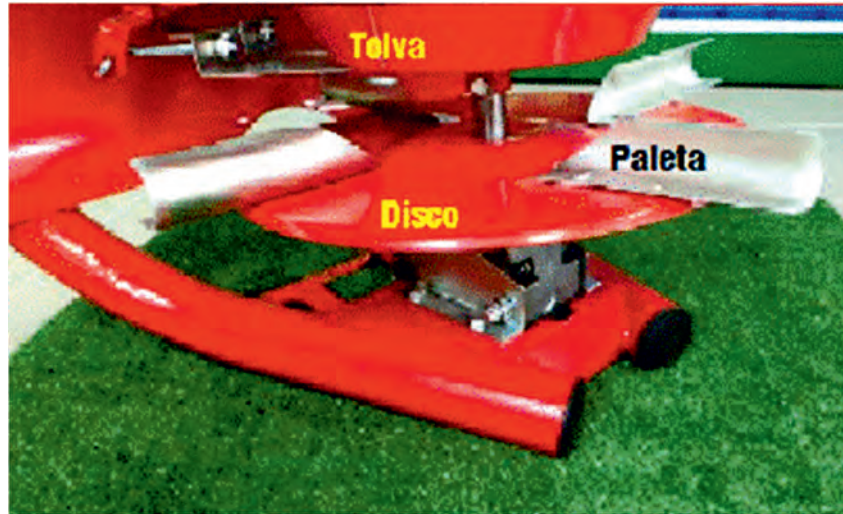


FIGURE 1. Centrifugal spreader of mineral fertilizers.
FIGURA 1. Órgano distribuidor centrífugo de fertilizantes minerales.

In this sense, the modeling of the movement of fertilizer particles on the spreader disc has been object of study at different times by different authors (Turbin *et al.*, 1967; Villette *et al.*, 2005; Cerović *et al.*, 2018), to determine the interrelation between the parameters involved in this process, such as: the diameter and angular velocity of the spreading disk, the position of the blades and the place of fall or feeding of the fertilizer on the disk, among others. The operation of a centrifugal fertilizer spreader has three phases or stages. In the first, the fertilizer is dropped by gravity from a mouth or gate located at the bottom of the hopper towards an area near the center of the disk (Figure 1). During the second stage, the material to be distributed is transported towards the edge of the disk, under the action of a system of forces, led by the centrifugal force and subjected to the action of friction forces with the surfaces of the disk itself and the paddles. In the third phase, the material is launched into the field, its trajectory being determined by a ballistic flight under the action of the density and speed of the surrounding air.

It is obvious that an adequate prediction and control of the movement of the particles in the second phase, starting from an adequate definition of the fertilizer drop point from the hopper gate, will allow adjusting both the outlet speed and the dispersion angle in the field of scattered particles. The modeling of the second phase has been approached by different authors. Villette *et al.* (2005) develop an analytical

En este sentido, la modelación del movimiento de las partículas de fertilizante sobre el disco esparcidor ha sido objeto de estudio en diferentes épocas por diferentes autores Turbin *et al.* (1967); Villette *et al.* (2005); Cerović *et al.* (2018), con vistas a determinar la interrelación entre los parámetros que intervienen en este proceso, tales como: el diámetro y velocidad angular del disco esparcidor; la posición de las paletas y el lugar de caída o alimentación del fertilizante sobre el disco, entre otros.

El funcionamiento de una esparcidora centrífuga de fertilizantes presenta tres fases o etapas. En la primera el fertilizante es dejado caer por gravedad desde una boca o compuerta situada en el fondo de la tolva hacia una zona cercana al centro del disco (Fig. 1). Durante la segunda etapa, el material a distribuir es transportado hacia el borde del disco, bajo la acción de un sistema de fuerzas, encabezadas por la fuerza centrífuga y sometido a la acción de las fuerzas de fricción con las superficies del propio disco y de las paletas. En la tercera fase, el material es lanzado al campo, estando su trayectoria determinada por un vuelo balístico bajo la acción de la densidad y velocidad del aire circundante.

Es obvio que una adecuada predicción y control del movimiento de las partículas en la segunda fase, partiendo de una definición adecuada del punto de caída de fertilizante desde la compuerta de la tolva, permitirá ajustar, tanto la velocidad de salida, como el ángulo de dispersión en el campo de las partículas esparcidas.

model to describe the movement of particles on a concave disk equipped with flat blades. The model allows establishing the relationship between the horizontal radial and tangential components of the output velocity, although it is not directly applicable to flat discs. Cerović *et al.* (2018) analyze the movement of an ideal, spherical and homogeneous fertilizer particle along a straight blade fixed to a rotating flat disc used in centrifugal mineral fertilizer spreaders. The analysis is carried out on a non-inertial reference system, applying the laws of classical mechanics. As a result, they propose a system of homogeneous ordinary differential equations of second order, the solution of which represents an approximation to the real relative motion of a fertilizer particle along a straight blade fixed radially to the disk rotating at constant angular velocity. The model is useful for the optimization of the parameters of this type of fertilizer distributor, although it is not applicable exactly in the case of pallets with an inclined disposition in relation to the radial direction. For this analysis Cerović *et al.* (2018), build on earlier studies by Aphale *et al.* (2003); Dintwa *et al.* (2004); Villette *et al.* (2005), although studies in this regard carried out in the 20th century reached a high level of development, such as those carried out by Mennel and Reece (1962); Turbin *et al.* (1967); Griffis *et al.* (1983); Olieslagers *et al.* (1996). The latter enables the calculation of the movement of the particles when the disk is provided with inclined blades in relation to the radial direction, having served as the basis for the realization of the model and software that are exposed in this work, being completed until the determination of the fan of dispersion of the fertilizer particles at the outlet of the spreading disk. The third phase corresponding to the flight of the particle once it is propelled by the disk, has been approached by different authors like Walker *et al.* (1997); Van Liedekerke *et al.* (2009) and Cool *et al.* (2014, 2016), not constituting the object of study in this work, whose objective is to present a mathematical mechanical model that describes the dynamics of the movement of particles on a fertilizer distributor disk with inclined blades, as well as a software that, based on the application of the model, makes it possible to calculate the geometric and kinematic parameters that determine the output speed and the dispersion angle of the fertilizer at the outlet of the disks.

MATERIALS AND METHODS

The model presented is developed to determine the characteristic of the movement of the fertilizer particles on the spreading disk and in contact with the blades, which will allow determining the magnitude and direction of the speed with which they leave the disc depending on its geometric and kinematic parameters. For the elaboration of the model, the flat disk is considered, although conical disks are also used. As for the blades, they can be oriented in the radial direction, as well as with an inclination contrary to the rotation of the disk (rearward blades) and with an inclination in favor of the rotation of the disk. The latter case was selected for the elaboration of the model, as it is considered the most

La modelación de la segunda fase ha sido abordada por diferentes autores. Villette *et al.* (2005) elaboran un modelo analítico para describir el movimiento de partículas sobre un disco cóncavo equipado con paletas planas. El modelo permite establecer la relación entre los componentes horizontales radial y tangencial de la velocidad de salida, aunque no es aplicable directamente a discos planos. Cerović *et al.* (2018) analizan el movimiento de una partícula de fertilizante ideal, esférica y homogénea a lo largo de una paleta recta fijada a un disco plano rotatorio utilizado en las esparcidoras centrífugas de fertilizantes minerales. El análisis se realiza sobre un sistema de referencia no inercial, aplicando las leyes de la mecánica clásica. Como resultado arriba a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de segundo orden, cuya solución representa una aproximación del movimiento relativo real de una partícula de fertilizante a lo largo de una paleta recta fijada en posición radial al disco que rota a velocidad angular constante. El modelo es de utilidad para la optimización de los parámetros de este tipo de distribuidor de fertilizantes, aunque no es aplicable con exactitud en el caso de paletas con disposición inclinada con relación a la dirección radial. Para este análisis, Cerović, et al. se apoyan en estudios anteriores efectuados por Aphale *et al.* (2003); Dintwa *et al.* (2004); Villette *et al.* (2005), aunque ya estudios al respecto realizados en el siglo XX alcanzaban un alto nivel de desarrollo, tales como los realizados por Mennel y Reece (1962); Turbin *et al.* (1967); Griffis *et al.* (1983); Olieslagers *et al.* (1996). Este último posibilita el cálculo del movimiento de las partículas cuando el disco está provisto de paletas inclinadas con relación a la dirección radial, habiendo servido de base para la realización del modelo y software que se expone en este trabajo, siendo completado hasta la determinación del abanico de dispersión de las partículas de fertilizante a la salida del disco esparcidor. La tercera fase correspondiente al vuelo de la partícula una vez que es impulsada por el disco, ha sido abordada por diferentes autores Walker *et al.* (1997); Van Liedekerke *et al.* (2009); Cool *et al.* (2014, 2016), no constituyendo objeto de estudio en este trabajo, cuyo objetivo es exponer un modelo mecánico matemático que describa la dinámica del movimiento de las partículas sobre un disco distribuidor de fertilizantes con paletas inclinadas, así como un software que, basado en la aplicación del modelo, viabilice el cálculo de los parámetros geométricos y cinemáticos que determinan la velocidad de salida y el abanico de dispersión del fertilizante a la salida de los discos.

MATERIALES Y MÉTODOS

El modelo que se presenta es elaborado con vistas a determinar la característica del movimiento de las partículas de fertilizante sobre el disco esparcidor y en contacto con las paletas, lo que permitirá determinar la magnitud y dirección de la velocidad con que éstas abandonan el disco en función de los parámetros geométricos y cinemáticos de éste.

Para la elaboración del modelo se parte de considerar el disco plano, aunque también se emplean discos cónicos. En cuanto a las paletas, las mismas pueden estar orientadas en la dirección radial, así como con inclinación contraria a la rotación del disco (paletas atrasadas) y con inclinación a favor de la rotación del disco. Se selecciona para la elaboración del modelo este último caso, por considerarse el más eficiente desde

efficient in achieving a higher speed of particles launch with the same rotation speed of the disk. The analysis was carried out by obtaining the differential equation of the dynamics of the motion of a particle by applying the laws of classical mechanics (Newton's Second Law). The analysis was carried out on a non-inertial reference system that rotates together with the disk, so it was necessary to take into account the "fictitious" forces (centrifugal force and Coriolis force) that act on the particle in this mobile system. The solution of the differential equation of motion was carried out by classical methods of mathematical analysis. The equations obtained from the solution of the differential equation of motion were programmed using the Mathcad software, version 2000 Professional, which made it possible to evaluate the model with specific data and obtain the output speed and angle of the fertilizer based on parameters of input such as: inclination angle of blades, coefficient of friction between the fertilizer and the disk and blades material, dimensions and rotation speed of the disk and coordinates of the zone of the fertilizer fall from the mouth of the hopper.

DEVELOPMENT

In Figure 2, the forces acting on a fertilizer particle in its interaction with the disk and blades of the centrifugal distributor are shown.

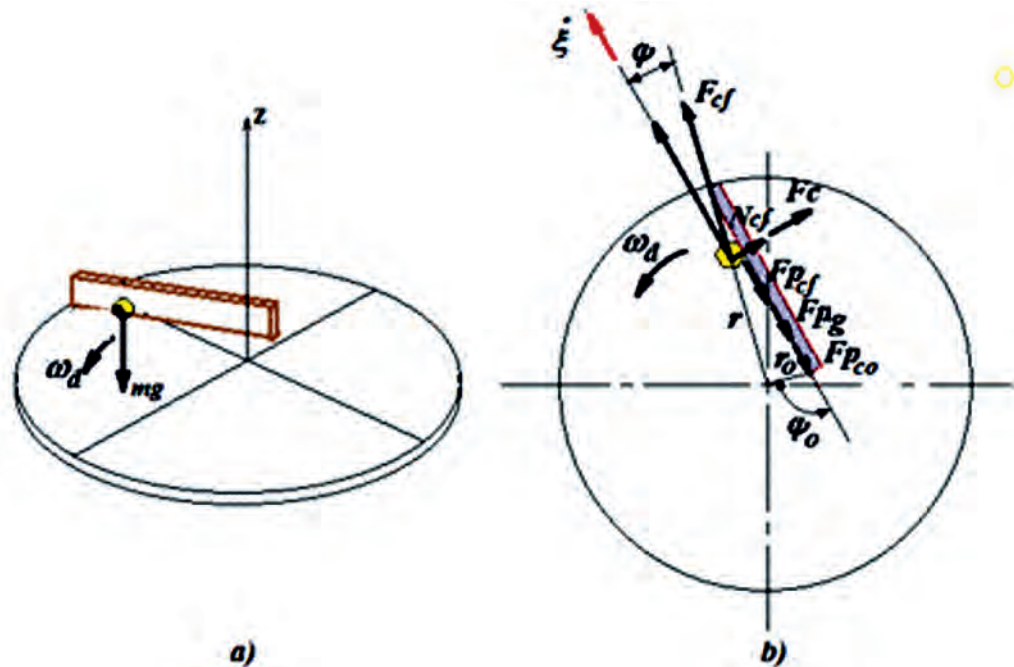


FIGURE 2. Forces acting on a particle in the centrifugal blade disk spreader.
FIGURA 2. Fuerzas que actúan sobre una partícula en el esparcidor centrífugo de disco con paletas.

As it can be seen in the figure, the following forces act on the particle: mg - Weight of the particle, acting perpendicular to the surface of the disk (Figure 5.6a), equal to the product of the particle mass (m) by the acceleration of gravity (g); F_{cf} - Centrifugal force, which is directed in the direction and sense of the radius-vector r that locates the radial position

el punto de vista de lograr una mayor velocidad del lanzamiento de las partículas con la misma velocidad de rotación del disco.

El análisis se realiza obteniendo la ecuación diferencial de la dinámica del movimiento de una partícula mediante la aplicación de las leyes de la mecánica clásica (2da. Ley de Newton). El análisis se efectúa sobre un sistema de referencia no inercial que, rota conjuntamente con el disco, por lo que es necesario tener en cuenta las fuerzas "ficticias" (fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis) que actúan sobre la partícula en este sistema móvil. La solución de la ecuación diferencial del movimiento se efectúa mediante métodos clásicos de análisis matemático.

Las ecuaciones obtenidas de la solución de la ecuación diferencial del movimiento son programadas empleando el software Mathcad, versión 2000 Professional, lo cual posibilita evaluar el modelo con datos concretos y obtener como salida, la velocidad y ángulo de salida del fertilizante en función de parámetros de entrada tales como: el ángulo de inclinación de las paletas, el coeficiente de fricción entre el fertilizante y el material del disco y las paletas, las dimensiones y velocidad de rotación del disco y las coordenadas de la zona de caída del fertilizante desde la boca de la tolva.

DESARROLLO

En la Fig. 2 se muestra las fuerzas que actúan sobre una partícula de fertilizante en su interacción con el disco y las paletas del distribuidor centrífugo.

Como se aprecia en la figura, sobre la partícula actúan las siguientes fuerzas:

mg - Peso de la partícula, que actúa perpendicularmente a la superficie del disco (Fig. 5.6a), igual al producto de la masa de la partícula (m) y la aceleración de la gravedad (g);
 F_{cf} - Fuerza centrífuga, la cual está dirigida en la dirección y sen-

of the particle with respect to the center of the disk. This force is expressed as:

$$\vec{F}_{cf} = -m \cdot \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_d \times \vec{r}) \quad 1$$

Being its magnitude:

$$F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega_d^2 \quad 2$$

Fco- Coriolis force, given by:

$$\vec{F}_{co} = 2m \cdot \vec{\xi} \times \vec{\omega}_d \quad 3$$

being its direction perpendicular to the vectors $\vec{\xi} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$ (relative velocity of the particle with respect to the blade) and $\vec{\omega}_d$ (angular velocity of the disk), its direction is opposite to the rotation speed of the disk, while its magnitude is given by:

$$F_{cf} = 2m \cdot \xi \cdot \omega_d \quad 4$$

Fp_{cf} - Friction force between the blade and the particle product of the centrifugal force:

$$F_{p_{cf}} = \mu_f \cdot m \cdot r \cdot \omega_d^2 \cdot \sin\psi \quad 5$$

Where μ_f is the coefficient of friction due to friction between the particle and the material of the blade; ψ is the angle between the direction of the centrifugal force and the direction of relative motion $\vec{\xi}$ of the particle with respect to the blade; *Fp_{co}* - Friction force between the blade and the particle product of the Coriolis force:

$$F_{p_{co}} = \mu_f \cdot 2m \cdot \xi \cdot \omega_d \quad 6$$

Fp_g - Friction force between disk and particle:

$$F_{p_g} = \mu_{fd} \cdot m \cdot g \quad 7$$

In general, the material of the disk is the same as the blades, in which case the coefficient of friction between the disc and the particle $\mu_{fd} = \mu_f$ Stating the Newton's Second Law in the non-inertial system the differential equation of the motion of the particle in the direction of the blade is obtained:

$$m r \omega_d^2 \cos\psi - \mu_f m g - \mu_f m r \omega_d^2 \sin\psi - 2\mu_f m \omega_d \frac{d\xi}{dt} = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad 8$$

From Figure 2 b) it can be seen that:

$$r \cdot \cos\psi = \xi - r_o \cdot \cos(\pi - \psi_o) \quad 9$$

where: ξ - path traveled by the particle along the blade, measured from the beginning of the blade;
 r_o - initial radius vector, directed from the center of the disk to the beginning of the blade;
 ψ_o - initial value of the angle ψ between the radio vector and the blade. It is also possible to state that:

$$r \cdot \sin\psi = r_o \cdot \sin(\pi - \psi_o) = cte \quad 10$$

On the other hand, the friction coefficient μ_f can be expressed indistinctly as friction angle ϕ_f through the relation:

$$\mu_f = \tan\phi_f \quad 11$$

tido del radio-vector que sitúa la posición radial de la partícula con respecto al centro del disco. Esta fuerza se expresa como:

$$\vec{F}_{cf} = -m \cdot \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_d \times \vec{r}) \quad 1$$

siendo su magnitud:

$$F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega_d^2 \quad 2$$

Fco- Fuerza de Coriolis, dada por:

$$\vec{F}_{co} = 2m \cdot \vec{\xi} \times \vec{\omega}_d \quad 3$$

siendo su dirección perpendicular a los vectores $\vec{\xi} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$ (velocidad relativa de la partícula respecto a la paleta) y $\vec{\omega}_d$ (velocidad angular del disco), su sentido es contrario a la velocidad de rotación del disco, mientras que su magnitud está dada por:

$$F_{cf} = 2m \cdot \xi \cdot \omega_d \quad 4$$

Fp_{cf} - Fuerza de fricción entre la paleta y la partícula producto de la fuerza centrífuga:

$$F_{p_{cf}} = \mu_f \cdot m \cdot r \cdot \omega_d^2 \cdot \sin\psi \quad 5$$

donde μ_f es el coeficiente de fricción por rozamiento entre la partícula y el material de la paleta; ψ es el ángulo entre la dirección de la fuerza centrífuga y la dirección del movimiento relativo $\vec{\xi}$ de la partícula respecto a la paleta;

Fp_{co} - Fuerza de fricción entre la paleta y la partícula producto de la fuerza de Coriolis:

$$F_{p_{co}} = \mu_f \cdot 2m \cdot \xi \cdot \omega_d \quad 6$$

Fp_g - Fuerza de fricción entre el disco y la partícula:

$$F_{p_g} = \mu_{fd} \cdot m \cdot g \quad 7$$

Por lo general el material del disco es el mismo de las paletas, en cuyo caso el coeficiente de fricción entre el disco y la partícula $\mu_{fd} = \mu_f$

Planteando la 2da. Ley de Newton en el sistema no inercial se obtiene la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en la dirección de la paleta:

De la Fig. 2 b) se aprecia que:

$$r \cdot \cos\psi = \xi - r_o \cdot \cos(\pi - \psi_o) \quad 9$$

donde: ξ - trayecto recorrido por la partícula a lo largo de la paleta, medido desde el inicio de ésta;
 r_o -radio vector inicial, dirigido desde el centro del disco hasta el comienzo de la paleta;
 ψ_o - valor inicial del ángulo entre el radiovector y la paleta.

Asimismo es posible plantear que:

$$r \cdot \sin\psi = r_o \cdot \sin(\pi - \psi_o) = cte \quad 10$$

Por otro lado, el coeficiente de fricción puede expresarse indistintamente como ángulo de fricción mediante la relación:

$$\mu_f = \tan\phi_f \quad 11$$

Substituting 9, 10 and 11 in 8 and carrying out some transformations, the following expression is obtained for the differential equation of the relative motion of the particle on the disk:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2 \cdot \mu_f \cdot \omega_d \frac{d\xi}{dt} - \omega_d^2 \cdot \xi = +r_o \cdot \omega_d^2 \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} - \mu_f \cdot g \quad 12$$

which is an ordinary linear and non-homogeneous 2nd order differential equation with constant coefficients, whose general solution can be determined as the sum of the solution of the homogeneous equation and the particular solution of the non-homogeneous equation.

$$\xi = \xi_h + \xi_p \quad 13$$

The homogeneous part of this equation is expressed as:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2 \cdot \mu_f \cdot \omega_d \frac{d\xi}{dt} - \omega_d^2 \cdot \xi = 0 \quad 14$$

having the general solution of the form:

$$\xi_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad 15$$

where C_1 and C_2 are the integration constants, while λ_1 and λ_2 are the roots of the characteristic equation:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \mu_f \cdot \omega_d \cdot \lambda - \omega^2 = 0 \quad 16$$

$$\lambda_1 = \omega_d \left(-\mu_f + \sqrt{1 + \mu_f^2} \right) \quad 17$$

$$\lambda_2 = \omega_d \left(-\mu_f - \sqrt{1 + \mu_f^2} \right) \quad 18$$

A particular solution for the non-homogeneous Equation 12 can be determined by applying the indeterminate constant method:

$$\xi_p = C \quad 19$$

Differentiating 19 and substituting in Equation 12, the following particular solution of the non-homogeneous differential equation is obtained:

$$\xi_p = r_o \cdot \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} - \frac{\mu_f \cdot g}{\omega_d^2} \quad 20$$

Substituting 15 and 20 into 13, the solution of the differential equation 12 takes the following form:

$$\xi = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + r_o \cdot \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} - \frac{g \cdot \mu_f}{\omega_d^2} \quad 21$$

Finally, Equation 5.25 is evaluated for the initial conditions, corresponding to the starting position of the blades, where for $t=0$; $\xi=0$ and the velocity of the particles $d\xi/dt=0$. In this way, the solution of the differential equation of the motion of the particle is finally obtained:

$$\xi = \left[\frac{g \cdot \mu_f}{\omega_d^2} - r_o \cdot \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} \right] \left[\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 t} - 1) \right] \quad 22$$

Sustituyendo 9, 10 y 11 en 8 y efectuando algunas transformaciones se arriba a la siguiente expresión para la ecuación diferencial del movimiento relativo de la partícula sobre el disco:

que es una ecuación diferencial ordinaria de 2do orden, lineal y no homogénea con coeficientes constantes, cuya solución general puede ser determinada como la suma de la solución de la ecuación homogénea y la solución particular de la ecuación no homogénea.

$$\xi = \xi_h + \xi_p \quad 13$$

La parte homogénea de esta ecuación se expresa como:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2 \cdot \mu_f \cdot \omega_d \frac{d\xi}{dt} - \omega_d^2 \cdot \xi = 0 \quad 14$$

teniendo la solución general la forma:

$$\xi_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad 15$$

siendo C_1 y C_2 las constantes de integración, mientras que λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \mu_f \cdot \omega_d \cdot \lambda - \omega^2 = 0 \quad 16$$

$$\lambda_1 = \omega_d \left(-\mu_f + \sqrt{1 + \mu_f^2} \right) \quad 17$$

$$\lambda_2 = \omega_d \left(-\mu_f - \sqrt{1 + \mu_f^2} \right) \quad 18$$

Una solución particular para la ecuación no homogénea 12 puede ser determinada aplicando el método de la constante indeterminada:

$$\xi_p = C \quad 19$$

Diferenciando 19 y sustituyendo en la ecuación 12 se obtiene la siguiente solución particular de la ecuación diferencial no homogénea:

$$\xi_p = r_o \cdot \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} - \frac{\mu_f \cdot g}{\omega_d^2} \quad 20$$

Sustituyendo 15 y 20 en 13, la solución de la ecuación diferencial 12 toma la siguiente forma:

Finalmente se evalúa la ecuación 5.25 para las condiciones iniciales, correspondiente a la posición de comienzo de las paletas, donde para $t=0$; $\xi=0$ y la velocidad de las partículas $d\xi/dt=0$. De esta manera se obtiene finalmente la solución de la ecuación diferencial del movimiento de la partícula:

A graph of this expression, evaluated for certain conditions, is shown in Figure 5.7, showing that the residence time of the particles on the disk is of the order of hundredths of a second.

Una gráfica de esta expresión, evaluada para determinadas condiciones, se muestra en la Fig. 5.7, apreciándose que el tiempo de permanencia de las partículas sobre el disco es del orden de las centésimas de segundo.

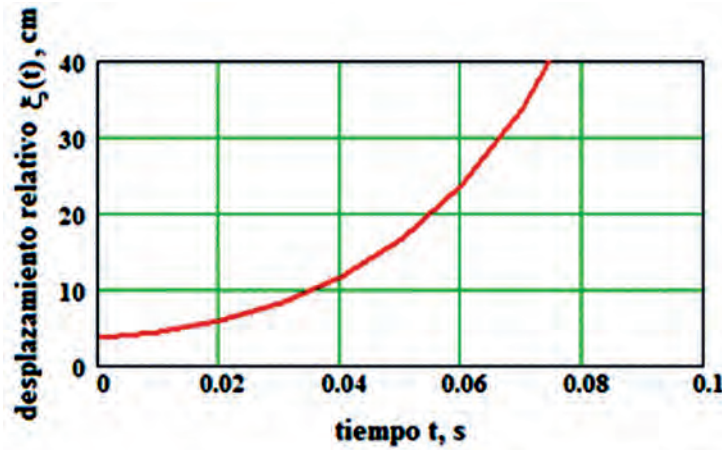


FIGURE 3. Variation as a function of time of the relative displacement of the particles along a disk with advanced blades rotating at 800 r.p.m
 FIGURA 3. Variación en función del tiempo del desplazamiento relativo de las partículas a lo largo de un disco con paletas adelantadas que rota a 800 r.p.m.

Deriving expression 22 with respect to time, the relative velocity of the particles along the distributor blades is obtained:

Derivando la expresión 22 con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad relativa de las partículas a lo largo de las paletas del distribuidor:

$$v_r = \frac{d\xi}{dt} = \left[\frac{g \cdot \mu_f}{\omega_d^2} - r_o \cdot \frac{\cos(\pi - \psi_o - \phi_f)}{\cos(\phi_f)} \right] \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right] \quad 23$$

The magnitude of the radio vector that joins the center of the disk with the instantaneous position of the particles is determined as follows:

La magnitud del radiovector que une el centro del disco con la posición instantánea de las partículas, se determina como sigue:

$$r(t) = \sqrt{(\xi + r_o \cdot \cos \psi_o)^2 + (r_o \cdot \text{sen} \psi_o)^2} \quad 24$$

$$r(t) = \sqrt{(\xi + r_o \cdot \cos \psi_o)^2 + (r_o \cdot \text{sen} \psi_o)^2} \quad 24$$

Substituting expression 22 for $\xi=f(t)$ in expression 24 and evaluating for the maximum magnitude of the radio vector r_e (outer radius of the disk), it is possible to obtain the residence time (t_p) of the particles in the disk, since it is fed (position r_o, ψ_o) until it reaches the outer edge of the disk (position r_e, ψ_e). In that time, the disk will have rotated an angle $\theta_a = \omega_d t_p$ and also the particle will have traveled an angle in its relative motion: $\theta_r = \psi_o - \psi_e$ in such a way that the outlet angle of the particles will be given by:

Sustituyendo la expresión 22 de $\xi= f(t)$ en la expresión 24 y evaluando para la máxima magnitud del radiovector r_e (radio exterior del disco), es posible obtener el tiempo de permanencia (t_p) de las partículas en el disco, desde que es alimentado (posición r_o, ψ_o) hasta que alcanza el borde exterior del disco (posición r_e, ψ_e).

En ese tiempo, el disco habrá girado un ángulo $\theta_a = \omega_d t_p$ y además la partícula habrá recorrido un ángulo en su movimiento relativo: $\theta_r = \psi_o - \psi_e$ de manera tal que el ángulo de salida de las partículas estará dado por:

$$\theta_s = \omega_d t_p + (\psi_o - \psi_e) \quad 25$$

$$\theta_s = \omega_d t_p + (\psi_o - \psi_e) \quad 25$$

By evaluating these expressions for the feeding points 1 and 2 (Figure 4) that form a strip bf at the beginning of the blade, it is possible to obtain the angles (θ_{s1} and θ_{s2}) that define the fertilizer outlet points at the edge of the disk, the outlet angle being delimited by the vectors \vec{v}_{ab} that correspond to the absolute fertilizer outlet velocities, which are determined by the vector sum of the drag velocity \vec{v}_a (tangent to the outer edge of the disk) and the relative velocity \vec{v}_r of the particles, whose direction is collinear with the direction of the blades.

Evaluando estas expresiones para los puntos de alimentación 1 y 2 (Fig. 4) que forman una franja bf al inicio de la paleta, es posible obtener los ángulos (θ_{s1} y θ_{s2}) que definen los puntos de salida del fertilizante en el borde del disco, estando delimitado el abanico de salida por los vectores \vec{v}_{ab} que corresponden a las velocidades absolutas de salida del fertilizante, las cuales se determinan por la suma vectorial de la velocidad de arrastre \vec{v}_a (tangente al borde exterior del disco) y la velocidad relativa \vec{v}_r de las partículas, cuya dirección es colineal con la dirección de las paletas.

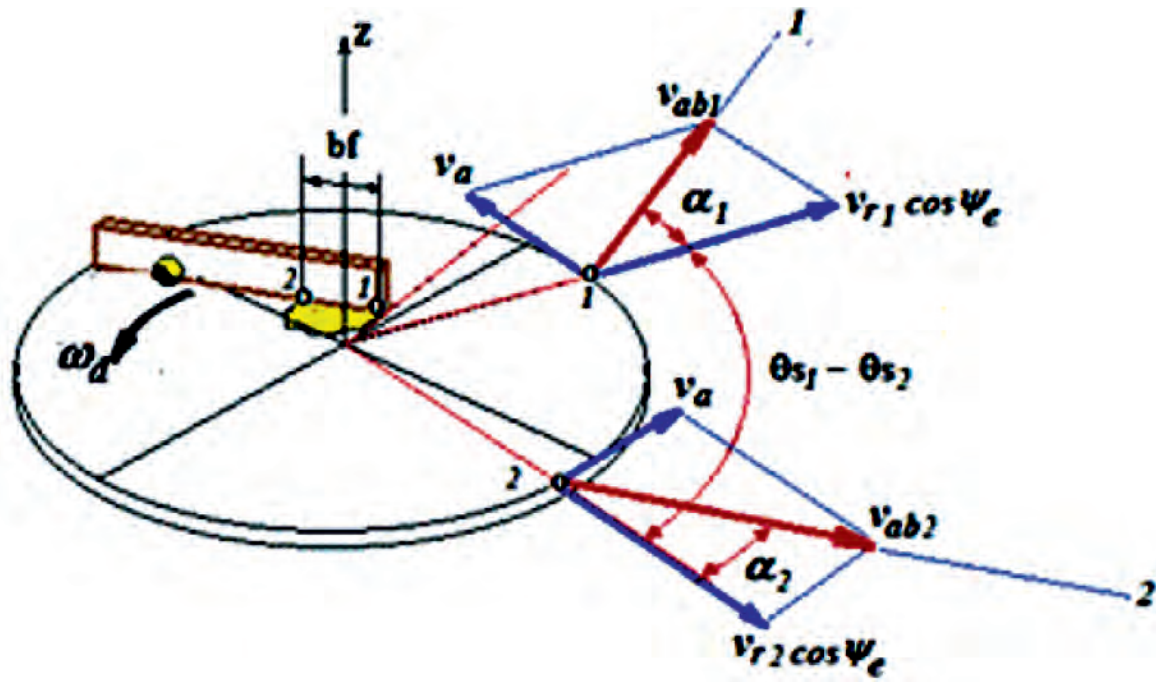


FIGURE 4. Fertilizer outlet conditions in the centrifugal disk.
 FIGURA 4. Condiciones de salida del fertilizante en el disco centrífugo.

The modulus of the ground speed is determined by the expression:

$$v_{ab} = \sqrt{(v_a)^2 + (v_r \cdot \cos\psi_e)^2} \quad 26$$

The drag speed $v_a = \omega_d r_e$ while the relative speed is determined by expression 23.

The fertilizer dispersion angle (θ_s), will be limited by the directions of \vec{v}_{ab1} and \vec{v}_{ab2} (Figure 4), being determined by the expression:

$$\theta_s = \theta_{s1} - \theta_{s2} - a_2 + a_1 \quad 27$$

where:

$$a_1 = \tan^{-1} \frac{\omega_d r_e}{v_{r1} \cdot \cos\psi_e}; a_2 = \tan^{-1} \frac{\omega_d r_e}{v_{r2} \cdot \cos\psi_e} \quad 28$$

The programming in Mathcad of the equations obtained is shown through an exercise that is exposed below, showing the screenshots of the run of the program that has been called “CENTRIFERT”:

Demonstration Exercise

Determine the zone (*bf*) for placing the fertilizer on a centrifugal disk with advanced blades, in order to obtain a dispersion angle of $90^\circ \pm 2^\circ$ in the opposite direction to the advance of the machine. The following data are known:

- Disk rotation speed: $n_d = 540$ r.p.m.;
- External radius of the disk: $r_e = 25$ cm;
- Angle of the blade with the final radius-vector: $\psi_e = 20^\circ$;
- Coefficient of friction of the fertilizer on the disk and the blade’s material: $m_f = 0.6$

El módulo de la velocidad absoluta se determina por la expresión:

$$v_{ab} = \sqrt{(v_a)^2 + (v_r \cdot \cos\psi_e)^2} \quad 26$$

La velocidad de arrastre $v_a = \omega_d r_e$, mientras que la velocidad relativa se determina por la expresión 23.

El abanico de dispersión del fertilizante (θ_s , estará limitado por las direcciones de \vec{v}_{ab1} y \vec{v}_{ab2} (Fig. 4), determinándose mediante la expresión::

$$\theta_s = \theta_{s1} - \theta_{s2} - a_2 + a_1 \quad 27$$

donde:

$$a_1 = \tan^{-1} \frac{\omega_d r_e}{v_{r1} \cdot \cos\psi_e}; a_2 = \tan^{-1} \frac{\omega_d r_e}{v_{r2} \cdot \cos\psi_e} \quad 28$$

La programación en Mathcad de las ecuaciones obtenidas se muestra a través de un ejercicio que se expone a continuación, mostrándose las capturas de pantalla de la corrida del programa que ha sido denominado “CENTRIFERT”:

Ejercicio demostrativo:

Determine la zona (*bf*) de colocación del fertilizante sobre un disco centrífugo con paletas adelantadas, de manera de obtener un abanico de dispersión de $90^\circ \pm 2^\circ$ en dirección opuesta al avance de la máquina. Se conocen los siguientes datos:

- Velocidad de rotación del disco: $n_d = 540$ r.p.m.;
- Radio exterior del disco: $r_e = 25$ cm;
- Ángulo de la paleta con el radio-vector final: $\psi_e = 20^\circ$;
- Coeficiente de fricción del fertilizante sobre el material de la paleta y el disco: $m_f = 0.6$

Solution of the Exercise using the Program “CENTRIFERT”
Solución del ejercicio empleando el programa “CENTRIFERT”:

CENTRIFERT

PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE DISTRIBUIDORES CENTRÍFUGOS DE FERTILIZANTES

INTRODUCCIÓN DE DATOS PARA LA CORRIDA DEL PROGRAMA:

Introducir coeficiente de fricción del fertilizante sobre el material de la paleta y el disco:

$$\mu_f := 0.6 \quad \phi_f := \text{atan}(\mu_f) \quad \phi_f = 0.54 \quad \text{rad}$$

$$\phi_{fg} := \phi_f \cdot \frac{180}{\pi} \quad \phi_{fg} = 30.964 \quad (^\circ)$$

Introducir radio del disco:

$$r_e := 25 \quad \text{cm}$$

Introducir ángulo de la paleta

$$\psi_g := 20 \quad (^\circ) \quad \psi := \psi_g \cdot \frac{\pi}{180} \quad \psi = 0.349 \quad \text{rad}$$

Introducir ángulo con la paleta del radiovector del material depositado:

$$\psi_{og1} := 100 \quad (^\circ) \quad \psi_{o1} := \psi_{og1} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{rad} \quad \psi_{o1} = 1.745 \quad \text{rad}$$

Calcular radiovector inicial:

$$r_{o1} := \left(\frac{r_e \cdot \sin(\psi)}{\sin(\psi_{o1})} \right) \quad r_{o1} = 8.682 \quad \text{cm}$$

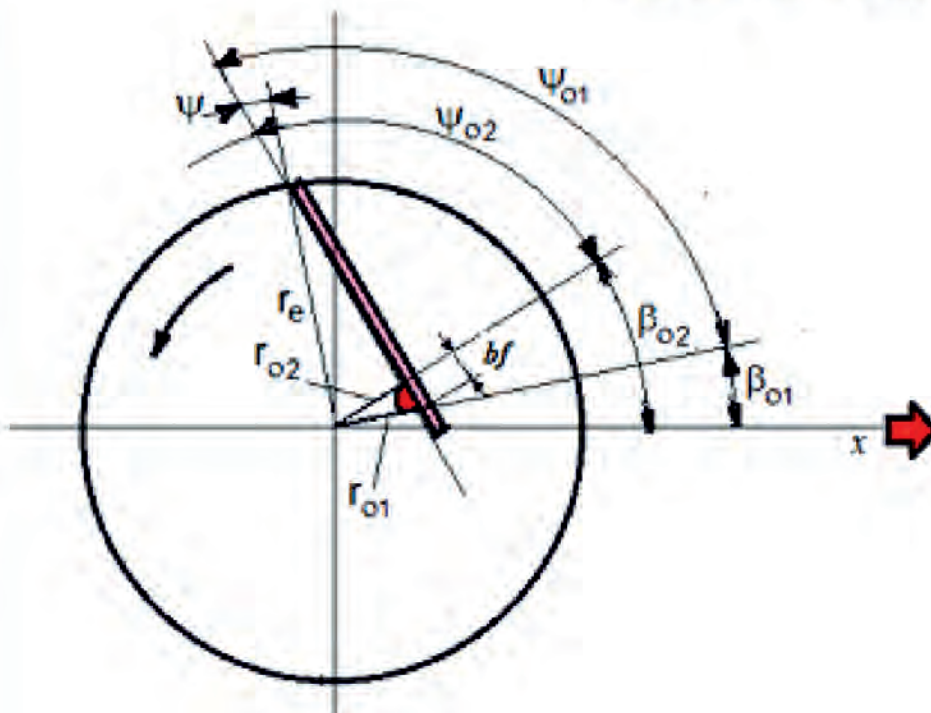
Declarar ángulo de rol con la dirección del movimiento

$$\beta_{og1} := 12 \quad (^\circ) \quad \beta_{o1} := \beta_{og1} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{rad} \quad \beta_{o1} = 0.209 \quad \text{rad}$$

Comprobar relacion entre r y ψ :

$$r_e \cdot \sin(\psi) = 8.551$$

$$r_{o1} \cdot \sin(\psi_{o1}) = 8.551$$



Introducir la frecuencia de rotación del disco distribuidor:

$$n_d := 540 \quad \frac{\text{rev}}{\text{min}} \quad \omega_d := n_d \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega_d = 56.549 \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Introducir aceleración de la gravedad: $g := 980 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

Determinar las raíces de la ecuación carateristicas de la parte derecha de la ecuación diferencial:

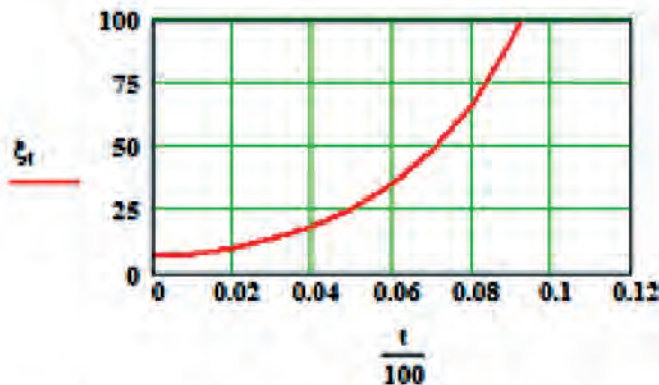
$$\lambda_1 := \omega d \cdot (\sqrt{1 + \mu f^2} - \mu f) \quad \lambda_1 = 32.017 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\lambda_2 := -\omega d \cdot (\sqrt{1 + \mu f^2} + \mu f) \quad \lambda_2 = -99.876 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Introducir rango de tiempo a evaluar:

Determinar desplazamiento de las partículas: $t=0,1..12$ paleta en función del tiempo (paleta inclinada hacia delante):

$$\xi_t := \left[\frac{\mu f \cdot g}{\omega d^2} + r o l \cdot \frac{\cos[(\pi - \psi o l) - \phi f]}{\cos(\phi f)} \right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \frac{t}{100}} - \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \frac{t}{100}} - 1 \right) \right]$$



Distancia radical de la posición instantánea de la partícula hasta el centro del disco:

Con paletas inclinadas hacia delante:

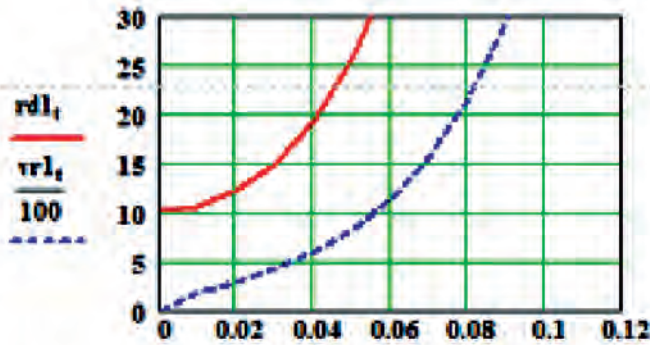
$$r d l_t := \sqrt{(\xi_t + r o l \cdot \cos(\psi o l))^2 + r o l^2 \cdot (\sin(\psi o l))^2}$$

Velocidad realtiva de las partículas a lo largo de la paleta, en dirección al borde del disco:

$$v r l_t := \left[\frac{\mu f \cdot g}{\omega d^2} + r o l \cdot \frac{\cos[(\pi - \psi o l) - \phi f]}{\cos(\phi f)} \right] \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot \frac{t}{100}} - e^{\lambda_2 \cdot \frac{t}{100}} \right) \right]$$

Graficación y tabulación de posición y velocidad relativa de las partículas:

Graficación y tabulación de posición y velocidad relativa de las partículas:

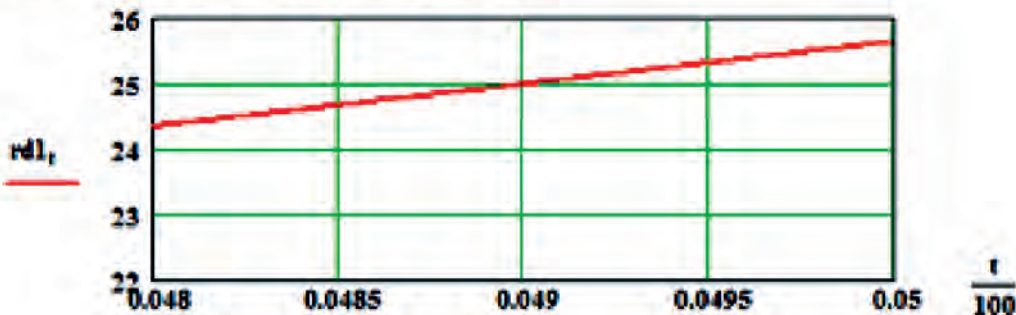


$\frac{t}{100} =$	$\frac{t}{100}$	$\frac{vrl_t}{100} =$
s	cm	$\frac{m}{s}$
0	10.095	0
0.01	10.603	1.669
0.02	12.105	2.913
0.03	14.837	4.239
0.04	19.179	5.922
0.05	25.632	8.188
0.06	34.885	11.289
0.07	47.898	15.554
0.08	66.018	21.424
0.09	91.116	29.51
0.1	125.786	40.646
0.11	173.612	55.985
0.12	239.54	77.111

Determinar tiempo en que las partícula recorre el radio del disco:

Para ello es necesario interactuar con el programa con vistas a interpolar el valor del radio exterior del disco

Nota: Se repite el gráfico cambiando los límites del tiempo y el radio del disco buscando correspondiente al radio exterior rd del disco:



Del gráfico ampliado se aprecia que para $r_{dl}=r_e=cm$, $t=0.049$ s

Entonces se declara este valor del tiempo correspondiente al radio extremo del disco:

$$r_e = 25 \text{ cm} \quad t_{el} = 0.049 \text{ s}$$

Determinar ángulo del punto de salida del fertilizante con relación al eje x del movimiento:

Paletas hacia delante:

$$\theta_{s1} = \omega_d \cdot t_{el} + (\psi_{o1} - \psi) + \beta_{o1}$$

$$\omega_d \cdot t_{el} \cdot \frac{180}{\pi} = 158.76 \quad (o)$$

$$(\psi_{o1} - \psi) \cdot \frac{180}{\pi} = 80 \quad (o) \quad \beta_{o1} = 12 \quad (o)$$

$$\theta_{s1} = 4.377 \text{ rad}$$

$$\theta_{sg1} = \theta_{s1} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \theta_{sg1} = 250.76 \quad (o)$$

Este ángulo de salida del fertilizante se obtiene para un punto de colocación del fertilizante en el disco igual a:

$$r_{o1} = 8.682 \text{ cm}$$

el cual se encuentra a un ángulo con la paleta y el radiovector de:

$$\psi_{og1} = 100 \quad (o) \quad \psi_{o1} = 1.745 \text{ rad}$$

y con la dirección del movimiento

$$\beta_{og1} = 12 \quad (o)$$

Entonces si se desea obtener un abanico de salida cercano a 90 grados, debe evaluarse de nuevo el programa para otros valores de r_o y ψ_o de manera de obtener un nuevo ángulo de salida θ_{sg2} igual a:

$$\theta_{sg2} = \theta_{sg1} - 90 \quad \theta_{sg2} = 160.76$$

En este punto se repite la evaluación del programa con otros puntos (r_o , ψ_o) hasta obtener el valor deseado para θ_{sg2} .

**SEGUNDA EVALUACIÓN:
RECORDAR QUE EN LA PRIMERA EVALUCACIÓN:**

$$r_{o1} = 8.682 \text{ cm} \quad \psi_{o1} = 100 \quad (^\circ) \quad r_{o1} \cdot \sin(\psi_{o1}) = 8.551$$

NOTA: Esta relación r_o y ψ_{og} debe mantenerse, de manera que no implique una variación en la posición de la paleta respecto al centro del disco.

Introducir coeficiente de fricción del fertilizante sobre el material de la paleta:

$$\mu_f = 0.6 \quad \phi_f = \text{atan}(\mu_f) \quad \phi_f = 0.54 \quad \text{rad}$$

$$\phi_{fg} = \phi_f \cdot \frac{180}{\pi} \quad \phi_{fg} = 30.964 \quad (^\circ)$$

Introducir ángulo con la paleta del radiovector del material depositado en la nueva posición 2:

$$\psi_{og2} = 55 \quad (^\circ) \quad \psi_{o2} = \psi_{og2} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{rad} \quad \psi_{o2} = 0.96 \quad \text{rad}$$

Calcular radiovector de r_{o2} inicial en posición 2:

$$r_{o2} = \left(\frac{r_{e1} \cdot \sin(\psi_{o1})}{\sin(\psi_{o2})} \right) \quad r_{o2} = 10.438 \quad \text{cm}$$

Determinar ángulo de r_{o2} con la dirección del movimiento:

$$\beta_{o2} = \beta_{o1} + \psi_{o1} - \psi_{o2} \quad \beta_{o2} = 0.995 \quad \text{rad}$$

$$\beta_{og2} = \beta_{o2} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \beta_{og2} = 57 \quad (^\circ)$$

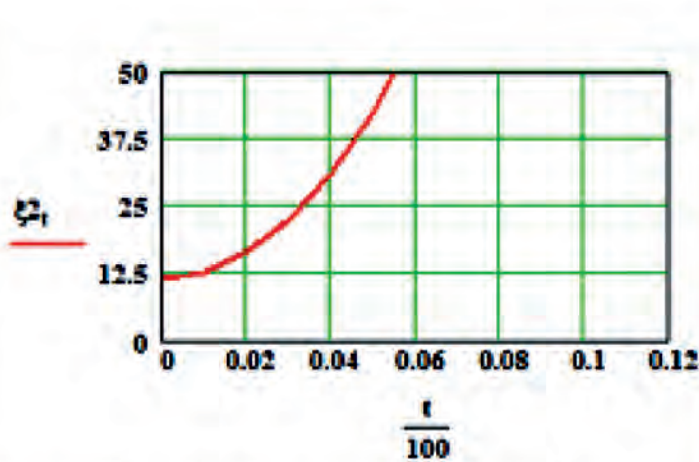
Comprobar la relación constante:

$$r_{o2} \cdot \sin(\psi_{o2}) = 8.551 \quad r_{o1} \cdot \sin(\psi_{o1}) = 8.551$$

Introducir rango de tiempo a evaluar: $t = 0, 1, 12$

Determinar desplazamiento de las partículas a lo largo de la paleta en función del tiempo (paleta inclinada hacia delante):

$$\xi_{2t} = \left[\frac{\mu_f \cdot g}{\omega_d^2} + r_{o2} \cdot \frac{\cos[(\psi_{o2}) - \phi_f]}{\cos(\phi_f)} \right] \left[\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \frac{t}{100}} - \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \frac{t}{100}} - 1 \right) \right]$$



$\frac{t}{100} =$	$\xi_{2t} =$
0	11.387
0.01	12.884
0.02	16.693
0.03	22.585
0.04	30.937
0.05	42.529
0.06	58.526
0.07	80.573
0.08	110.943
0.09	152.776
0.1	210.396
0.11	289.76
0.12	399.074

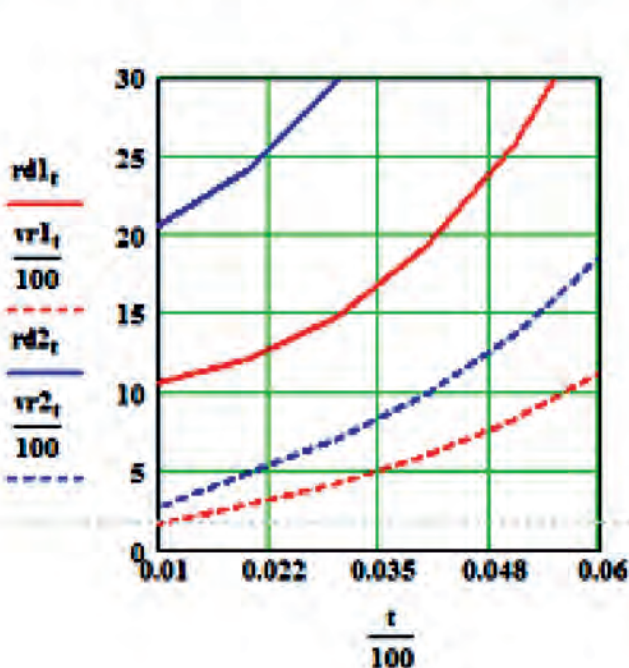
Distancia radial de la posición instantánea de la partícula hasta el centro del disco:

Con paletas inclinadas hacia delante:

$$rd_{2t} := \sqrt{(\xi_{2t} + ro_2 \cdot \cos(\psi o_2))^2 + (ro_2 \cdot \sin(\psi o_2))^2}$$

Velocidad relativa de las partículas a lo largo de la paleta, en dirección al borde del disco:

$$vr_{2t} := \left[\frac{\mu f \cdot g}{\omega d^2} + ro_2 \cdot \frac{\cos[(\psi o_2) - \phi f]}{\cos(\phi f)} \right] \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot \frac{t}{100}} - e^{\lambda_2 \cdot \frac{t}{100}} \right) \right]$$

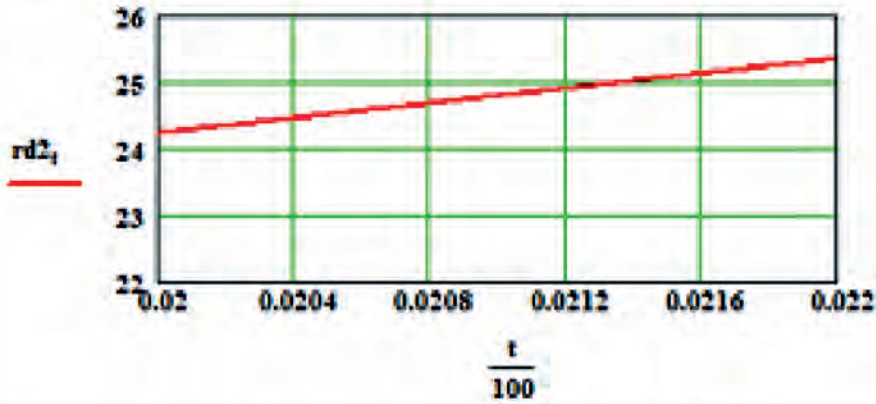


$\frac{t}{100} =$	$rd_{2t} =$	$\frac{vr_{2t}}{100} =$
0	19.364	0
0.01	20.717	2.765
0.02	24.239	4.826
0.03	29.824	7.023
0.04	37.901	9.811
0.05	49.263	13.565
0.06	65.078	18.702
0.07	86.981	25.766
0.08	117.243	35.492
0.09	158.994	48.887
0.1	216.552	67.336
0.11	295.871	92.746
0.12		127.745

Determinar tiempo en que la partícula recorre el radio del disco desde la posición 2:

Para ello es necesario interactuar con el programa con vistas a interpolar el valor del radio exterior del disco

Nota: Se repite el gráfico estrechando los límites del tiempo



+

Del gráfico ampliado se aprecia que para $rd_1=25$ cm, $t=0.0213$ s

Entonces se declara este valor del tiempo correspondiente al radio extremo del disco

$$re = 25 \text{ cm} \quad te2 := 0.0213 \text{ s}$$

Determinar ángulo de salida del fertilizante en posición 2:

$$\theta_{s2} := \omega_d \cdot te2 + (\psi_{o2} - \psi) + \beta_{o2}$$

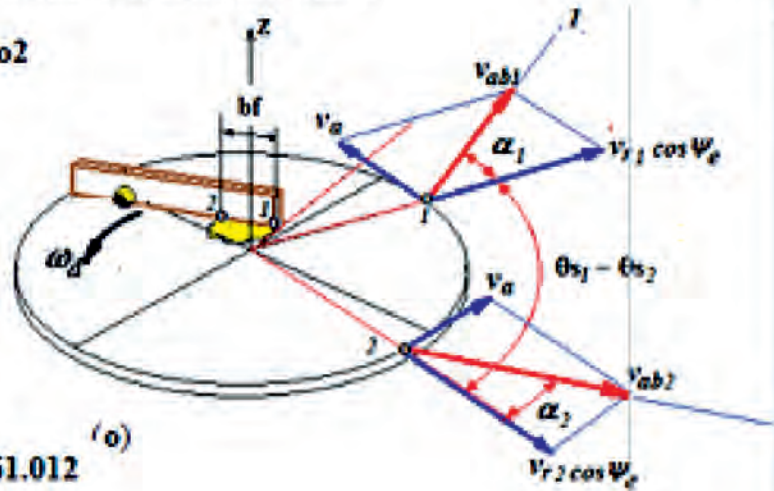
$$\omega_d \cdot te2 \cdot \frac{180}{\pi} = 69.012 \quad (o)$$

$$(\psi_{o2} - \psi) \cdot \frac{180}{\pi} = 35 \quad (o)$$

$$\theta_{s2} = 2.81 \text{ rad}$$

$$\theta_{sg2} := \theta_{s2} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \theta_{sg2} = 161.012 \quad (o)$$

$$\beta_{o2} \cdot \frac{180}{\pi} = 57 \quad (o)$$



Ahora se procede a determinar el abanico de salida del fertilizante

Determinación de la velocidad relativa a la salida del fertilizante:

$$vr_t := \left[\frac{\mu_f \cdot g}{\omega d^2} + rol \cdot \frac{\cos[(\pi - \psi_{ol}) - \phi_f]}{\cos(\phi_f)} \right] \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot \frac{t}{100}} - e^{\lambda_2 \cdot \frac{t}{100}} \right) \right]$$

$$vr1 := \left[\frac{\mu_f \cdot g}{\omega d^2} + rol \cdot \frac{\cos[(\pi - \psi_{ol}) - \phi_f]}{\cos(\phi_f)} \right] \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot te1} - e^{\lambda_2 \cdot te1} \right) \right] \cdot \frac{1}{100}$$

$$vr1 = 7.928 \quad \frac{m}{s}$$

$$vr2 := \left[\frac{\mu_f \cdot g}{\omega d^2} + rol \cdot \frac{\cos[(\pi - \psi_{ol}) - \phi_f]}{\cos(\phi_f)} \right] \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot te2} - e^{\lambda_2 \cdot te2} \right) \right] \cdot \frac{1}{100}$$

$$vr2 = 3.074 \quad \frac{m}{s}$$

+

Determinación de la velocidad de arrastre a la salida del fertilizante:

$$va := \omega d \cdot \frac{re}{100} \quad va = 14.137 \quad \frac{m}{s}$$

Determinación módulo de la velocidad absoluta a la salida del fertilizante:

$$vab1 := \sqrt{va^2 + (vr1 \cdot \cos(\psi))^2} \quad vab1 = 15.98 \quad \frac{m}{s}$$

$$vab2 := \sqrt{va^2 + (vr2 \cdot \cos(\psi))^2} \quad vab2 = 14.429 \quad \frac{m}{s}$$

Determinación dirección de la velocidad absoluta a la salida del fertilizante:

$$\alpha_1 := \text{atan} \left(\frac{\omega d \cdot re}{vr1 \cdot \cos(\psi)} \right) \quad \alpha_1 = 1.566 \quad \text{rad}$$

$$\alpha_{g1} := \alpha_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad \alpha_{g1} = 89.698 \quad (^\circ)$$

$$\alpha_2 := \text{atan} \left(\frac{\omega d \cdot re}{vr2 \cdot \cos(\psi)} \right) \quad \alpha_2 = 1.569 \quad \text{rad}$$

$$\alpha_{g2} := \alpha_2 \cdot \frac{180}{\pi} \quad \alpha_{g2} = 89.883 \text{ (}^\circ\text{)}$$

Calcular abanico de dispersión del fertilizante:

$$\theta_s := \theta_{s1} - \theta_{s2} - \alpha_2 + \alpha_1 \quad \theta_s = 1.563 \text{ rad}$$

$$\theta_{sg} := \theta_s \cdot \frac{180}{\pi} \quad \theta_{sg} = 89.563 \text{ (}^\circ\text{)}$$

Se obtiene un abanico de dispersión del fertilizante a la salida del disco de:

$$\theta_{sg1} - \theta_{sg2} = 89.748 \quad \theta_{sg1} = 250.76 \quad \theta_{sg2} = 161.012 \text{ (}^\circ\text{)}$$

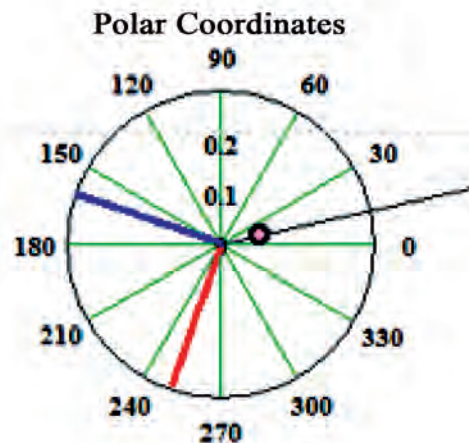
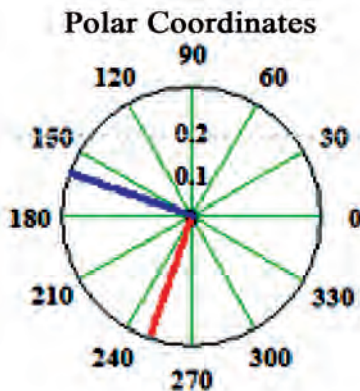
Esto implica depositar el fertilizante en el disco en una banda a lo largo de la paleta de ancho:

$$bf := r_{o2} \cdot \cos(\psi_{o2}) - r_{o1} \cdot \cos(\psi_{o1})$$

$$bf = 7.495 \text{ cm}$$

Ploteo en coordenadas polares de los ángulos de salida del fertilizante:

$$r := 25 \text{ cm} \quad \theta_1 := \theta_{sg1} \text{ deg} \quad \theta_2 := \theta_{sg2} \text{ deg}$$



COMMENT ON THE PROGRAM RUN

As it can be seen from the program run, the angles corresponding to the fertilizer outlet points in extreme positions 1 and 2 corresponding to the fertilizer positioning band $bf=7.945$ cm are obtained in graphical form (graphs in polar coordinates). Now, as explained, the fertilizer application or launch band (shaded area in Figure 5) will

COMENTARIO SOBRE LA CORRIDA DEL PROGRAMA:

Como se aprecia de la corrida del programa, se obtienen en forma gráfica (gráficos en coordenadas polares) los ángulos correspondientes a los puntos de salida del fertilizante en las posiciones extremas 1 y 2 correspondientes a la banda de posicionamiento del fertilizante $bf=7.945$ cm. Ahora bien, como se ha explicado, la banda

be framed by the directions of the absolute velocities (V_{ab_1} and V_{ab_2}), which have been determined on the basis of the values of the relative speeds (V_{r_1} and V_{r_2}) and the drag speed V_a . In Figure 5, the angle β_{01} has been retracted 90° approximately, to achieve that the fertilizer launching fan is located in the opposite direction to that of the movement of the machine.

de aplicación o lanzamiento del fertilizante (zona sombreada en la Fig. 5) estará enmarcada por las direcciones de las velocidades absolutas (V_{ab_1} y V_{ab_2}), que han sido determinadas sobre la base de los valores de las velocidades relativas (V_{r_1} y V_{r_2}) y la velocidad de arrastre V_a . En la Fig. 5, el ángulo β_{01} ha sido retradado 90° aproximadamente, para lograr que el abanico de lanzamiento del fertilizante esté situado en dirección contraria a la del movimiento de la máquina.

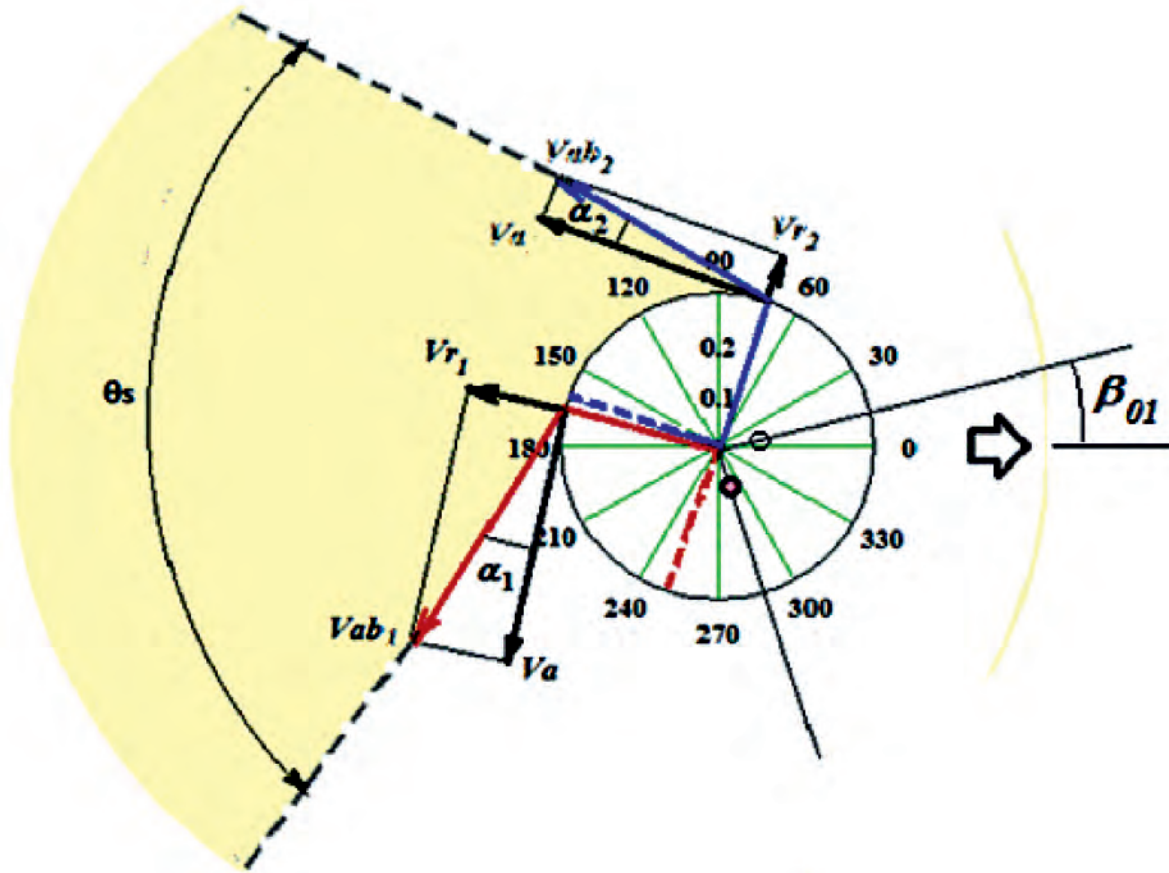


FIGURE 5. Construction of the fertilizer release finger
 FIGURA 5. Construcción del diapazón de lanzamiento del fertilizante

CONCLUSIONS

- An analytical model was obtained that describes the movement of particles on a spreader disk for fertilizers of the centrifugal type with straight blades inclined in relation to the radial direction.
- As a result of programming the model in Mathcad, the calculation of the fertilizer output parameters (output speed and dispersion angle) was possible based on input parameters such as: the angle of inclination of the blades, the coefficient of friction between the fertilizer and the material of the disc and the blades, the dimensions and speed of rotation of the disk and the coordinates of the area where the fertilizer falls from the hopper mouth.
- As a result of the execution of a demonstrating exercise, applying the program “CENTRIFERT”, a dispersion angle of the particles $\theta_s \approx 90^\circ$ was obtained. The width of the fertilizer feeding band on the disk was $bf \approx 7.5$ cm.

CONCLUSIONES

- Se obtiene un modelo analítico que describe el movimiento de partículas sobre un disco esparcidor de fertilizantes del tipo centrífugos con paletas rectas inclinadas con relación a la dirección radial;
- Como resultado de la programación en Mathcad del modelo se viabiliza el cálculo de los parámetros de salida del fertilizante (velocidad de salida y ángulo de dispersión) en función de parámetros de entrada tales como: el ángulo de inclinación de las paletas, el coeficiente de fricción entre el fertilizante y el material del disco y las paletas, las dimensiones y velocidad de rotación del disco y las coordenadas de la zona de caída del fertilizante desde la boca de la tolva;
- Como resultado de la ejecución de un ejercicio demostrativo, aplicando el programa “CENTRIFERT”, se obtiene un ángulo de dispersión de las partículas $\theta_s \approx 90^\circ$. El ancho de la banda de alimentación del fertilizante en el disco resultó $bf \approx 7,5$ cm.

REFERENCES

- APHALE, A.; BOLANDER, N.; PARK, J.; SHAW, L.; SVEC, J.; WASSGREN, C.: "Granular fertilizer particle dynamics on and off a spinner spreader", *Biosystem Engineering*, 85: 319-329, 2003, ISSN: 1537-5110, e-ISSN: 1537-5129.
- CEROVIĆ, V.B.; DRAGAN, V.P.; RADE, L.R.; SAŠA, R.B.; VUKOVIĆ, A.: "On the Fertilizer Particle Motion Along the Vane of a Centrifugal Spreader Disc Assuming Pure Sliding of the Particle", *Journal of Agricultural Sciences*, 63(1): 83-97, 2018, ISSN: 0021-8596, DOI: <https://dx.doi.org/10.2298/JAS1801083C>. UDC: 631.33.022.
- COOL, R.S.; PIETERS, G.J.; ACKER, V.J.; VAN DEN, B.J.; MERTENS, C.K.; NUYTTENS, R.E.D.; VAN DE GUCHT, C.T.; VANGEYTE, J.: "Determining the effect of wind on the ballistic flight of fertilizer particles", *Biosystems Engineering*, 151: 425-434, 2016, ISSN: 1537-5110, e-ISSN: 1537-5129.
- COOL, R.S.; PIETERS, J.; MERTENS, C.K.; HIJAZI, B.; VANGEYTE, J.: "A simulation of the influence of spinning on the Ballistic flight of spherical fertilizer grains", *Computers and Electronics in Agriculture*, 105: 121-131, 2014, ISSN: 0168-1699.
- DINTWA, E.; TIJSKENS, E.; OLIESLAGERS, R.; DE BAERDEMAEKER, J.; RAMON, H.: "Calibration of a spinning disc spreader simulation model for accurate site specific fertilizer application", *Biosystem Engineering*, 88: 49-62, 2004, ISSN: 1537-5110, e-ISSN: 1537-5129.
- GRIFFIS, C.L.; RITTER, D.W.; MATTHEWS, E.J.: "Simulation of rotary spreader distribution patterns", *Transactions of the ASAE*, 26(1): 33-37, 1983, ISSN: 2151-0032.
- MENNEL, F.I.; REECE, A.R.: "The theory of the centrifugal distributor: II. Motion on the disc, off-center feed", *Journal of Agricultural Engineering Research*, 7(4): 345-353, 1962.
- OLIESLAGERS, R.; RAMON, H.; DE BAERDEMAEKER, J.: "Calculation of fertilizer distribution patterns from a spinning disc spreader by means of a simulation model", *Journal of Agricultural Engineering Research*, 63: 137-152., 1996.
- TURBIN, B.G.; LURIÉ, A.B.; GRIGORIEV, C.M.; IVANOVICH, Z.M.; MELNIKOV, C.B.: *Máquinas Agrícolas. Teoría y Cálculo Tecnológico*, Ed. Machinostroenie, En idioma ruso ed., Leningrado, Rusia, 1967.
- VAN LIEDEKERKE, P.; THIJSKENS, E.; DINTWA, E.; RIOUAL, F.; VANGEYTE, J.; RAMON, H.: "DEM simulations of the particle flow on a centrifugal fertilizer spreader", *Powder Technology*, 190: 346-360, 2009, ISSN: 0032-5910.
- VILLETTE, S.; COINTAULT, F.; PIRON, E.; CHOPINET, B.: "Centrifugal Spreading, an Analytical Model for the Motion of Fertiliser Particles on a Spinning Disc", *Biosystem Engineering*, 92(2): 157-165, 2005, ISSN: 1537-5110, e-ISSN: 1537-5129.
- WALKER, J.T.; GRIFT, T.E.; HOFSTEE, J.W.: "Determining effects of fertiliser particle shape on aerodynamic properties", *Transactions of the ASAE*, 40: 21-27, 1997, ISSN: 2151-0032.

Arturo Martínez-Rodríguez, Profesor e Investigador Titular, Universidad Agraria de La Habana (UNAH), Facultad de Ciencias Técnicas, Centro de Mecanización Agropecuaria (CEMA), San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba, e-mail: armaro466@gmail.com

María Victoria Gómez-Águila, Profesora, Investigadora, Universidad Autónoma Chapingo, Texcoco, Edo. México, Estados Unidos Mexicanos, e-mail: mvaquila@hotmail.com

Martín Soto-Escobar, Profesor e Investigador, Universidad Autónoma Chapingo, Texcoco, Edo. México, Estados Unidos Mexicanos, e-mail: mvaquila@hotmail.com

The authors of this work declare that they have no conflict of interest.

This article is subject to the Creative Commons 4.0 International Attribution-Non-Commercial License (CC BY-NC 4.0).

The mention of trademarks of specific equipment, instruments or materials is for identification purposes, there being no promotional commitment in relation to them, neither by the authors nor by the publisher.