Revista Ciencia Universitaria. Vol. 17 No3. ISBN: 978-959-16-4290-5 (septiembre-diciembre).2019

Monografía | Monograph

Orientaciones sobre el tema I de probabilidades y distribuciones teóricas de probabilidades para la asignatura Estadística en la carrera de Ingeniería Agrícola

Guidance on topic I of probabilities and theoretical distributions of probabilities for the Statistical subject in the career of Agricultural Engineering.

MSc. José Antonio Pino Roque[1].
Dra. C. Mayra Arteaga Barrueta[2].
Dra. C. Lucía Fernández Chuairey[1].
MSc. Vilma Toledo Dieppa[3].
MSc. Yolanda de la Rosa Jiménez Álvarez[3].

[1] Colectivo de Estadística, Facultad de Ciencias Técnicas
2 Colectivo de Química, Facultad de Agronomía
3 Colectivo de Matemática, Facultad de Ciencias Técnicas

Universidad Agraria de La Habana "Frustuoso Rodríguez Pérez". Autopista Nacional, carretera Tapaste, km 23 ½, San José de Las Lajas, Mayabeque.

Autores para correspondencia: pino@unah.edu.cu

Resumen

Este material proporciona apuntes de contenidos con el objetivo de facilitar a los estudiantes poder recibir la docencia sobre el Tema I de Probabilidades y Distribuciones Teóricas de Probabilidades. Los ejercicios que se brindan vienen acompañados de orientaciones para su solución. Al final del material se proporcionan otras orientaciones para el estudio de varias distribuciones teóricas de probabilidad. Es indispensable que el estudiante pueda instruirse a través de los videos 01 (La Historia de las Probabilidades) y los videos 1a y 1b (Definiciones, ejemplos y Distribuciones teóricas de probabilidades). Estos materiales brindan informaciones muy valiosas para el trabajo independiente.

Palabras claves: Estadística, probabilidades, distribuciones, docencia universitaria.

Summary

This material provides notes of contents with the aim of facilitating the students to receive the teaching on the Topic I of Probabilities and Theoretical Distributions of Probabilities. The exercises that are offered are accompanied by guidelines for their solution. Other orientations for the study of several theoretical probability distributions are provided at the end of the material. It is essential that the student can be educated through videos 01 (The History of Probability) and videos 1a and 1b (Definitions,

examples and theoretical distributions of probabilities). These materials provide valuable information for independent work.
Keywords: Statistics, probabilities, distributions, university teaching.

Recibido: 14 de mayo de 2019.

Aprobado: 5 de octubre de 2019.

Introducción

Los primeros trabajos en los que tuvieron origen los conceptos fundamentales de la teoría de las probabilidades, se redujeron a las tentativas de crear la teoría de los juegos al azar.

Linares (1990) y Bouza y Sistachs (2010) hacen referencias a los trabajos ejecutados por Cardano, Huygens, Pascal, Fermat y otros (siglos XVI – XVII), y reconoce como la historia recoge como anécdota que Pascal (1623 – 1662) y Fermat (1601 – 1665) dan solución a dos problemas planteados por Antoine Gombard (Caballero de la Mére) en el año 1654:

1. ¿Cuántas veces se necesita lanzar un par de dados para que sean más favorables obtener por lo menos un par de 6?.
2. ¿Cómo repartir las apuestas en un juego que se interrumpe?.

En Gmurman (1979) se refleja como por los razonamientos que hicieron Pascal y Fermat para dar solución a estos dos problemas, se evidencia que ambos estaban familiarizados con algunos métodos usados en el cálculo de las probabilidades desde el siglo X (la solución más completa fue la dada por Galileo (1564 – 1642).

Guerra *et al* (2006) señala que la etapa siguiente de desarrollo de la teoría de las probabilidades está vinculada con el nombre de Jacobo de Bernoulli (1654 – 1705). El teorema por él demostrado, que posteriormente tomaría el nombre de “Ley de los grandes números”, fue la base teórica de los hechos acumulados con anterioridad; donde los procesos posteriores de la teoría probabilística se debe a los matemáticos Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, etc.

Introduction

The first works in which the fundamental concepts of the theory of probabilities originated were reduced to attempts to create the theory of random games.

Linares (1990) and Bouza and Sistachs (2010) make references to the works carried out by Cardano, Huygens, Pascal, Fermat and others (16th and 17th centuries), and recognize how history records as an anecdote that Pascal (1623 1662) and Fermat (1601 1665) provide a solution to two problems raised by Antoine Gombard (Knight of the Mere) in the year 1654:

1- How many times do you need to roll a pair of dice for it to be more favorable to get at least a pair of 6?

2- How to distribute the bets in a game that is interrupted?

In Gmurman (1979) it is reflected how, due to the reasoning that Pascal and Fermat did to solve these two problems, it is evident that both were familiar with some methods used in the calculation of probabilities since the 10th century (the most complete solution was that given by Galileo (1564 1642).

Guerra et al (2006) points out that the next stage of development of the theory of probabilities is linked to the name of Jacobo de Bernoulli (1654 1705). The theorem demonstrated by him, which later would take the name of Law of large numbers, was the theoretical basis of the previously accumulated facts; where the later processes of the probabilistic theory are due to the mathematicians Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, etc.

El nuevo período Linares (1990) el más fructífero, está relacionado con los nombres de P. L. Chebishev (1821 – 1894) y sus alumnos A. A. Harkov (1856 – 1922) y A. M. Liapunov (1857 – 1918). Es en este período donde la teoría de las probabilidades se convierte en una Ciencia Matemática ordenada. Su desarrollo posterior se debe a los matemáticos rusos y soviéticos.

En la actualidad corresponde a los matemáticos del mundo el papel principal en la creación de nuevas ramas de la teoría de las probabilidades y su amplia utilización en distintas partes de las ciencias naturales y de la técnica, y muchas otras ciencias teóricas y aplicadas. (Bacchini *et al*., 2018)

La teoría de las probabilidades sirve también como base de la estadística matemática y aplicada, penetrando cada vez más con mayor amplitud, en los distintos campos de las ciencias y las técnicas, contribuyendo a su progreso.

El objeto de estudio de la teoría de las probabilidades lo constituyen los fenómenos aleatorios masivos. Se denominan aleatorios los sucesos que pueden ocurrir y pueden no ocurrir en uno de estos fenómenos.

Una medida de la posibilidad de ocurrencia de tales sucesos es precisamente la probabilidad.

La mayoría de los fenómenos de la naturaleza y la sociedad son aleatorios, algunos evidentemente y otros se revelan como tales al afinar la medición y tratarlos multilateralmente en la madeja de los múltiples factores que sobre ellos influyen (a menudo todos ellos, o una buena parte de ellos, juntos pueden considerarse un único factor aleatorio). (Egaña, 2003).

Para Miller *et al* (2008) la Estadística podría considerarse en este medio como una tecnología que haciendo uso de la teoría de las probabilidades, ayuda a conocer este mundo. Esta ofrece una metodología para tratar el estudio de los fenómenos aleatorios, para investigar y descubrir sus regularidades, sus

The new Linares period (1990), the most fruitful, is related to the names of P. L. Chebishev (1821 1894) and his students A. A. Harkov (1856 1922) and A. M. Liapunov (1857 1918). It is in this period that the theory of probabilities becomes an ordered Mathematical Science. Its further development is due to Russian and Soviet mathematicians.

At present, the world's mathematicians have the leading role in the creation of new branches of probability theory and its wide use in different parts of the natural and technical sciences, and many other theoretical and applied sciences. (Bacchini et al., 2018)

The theory of probabilities also serves as the basis for mathematical and applied statistics, penetrating more and more broadly into the different fields of science and technology, contributing to their progress.

The object of study of the theory of probabilities is massive random phenomena. Random events are called events that can occur and may not occur in one of these phenomena.

A measure of the possibility of occurrence of such events is precisely the probability.

Most of the phenomena of nature and society are random, some obviously and others are revealed as such by refining the measurement and treating them multilaterally in the skein of the multiple factors that influence them (often all of them, or a good part of them). of them together can be considered a single random factor). (Egana, 2003).

For Miller et al (2008), Statistics could be considered in this medium as a technology that, using the theory of probabilities, helps to understand this world. This offers a methodology to deal with the study of random phenomena, to investigate and discover their regularities, their characteristics, describing them, características, describiéndolas, estimándolas, pronosticándolas, contrastándolas y relacionándolas.

La teoría de las probabilidades, sobre la que se fundamenta la Estadística constituye una teoría matemática que como tal requiere, en general, hacer uso de un alto nivel de razonamiento lógico abstracto, lo que a menudo espanta a las personas que evitan las complicaciones con esta ciencia. (Walpole *et al*., 2008)

Según Hernández (1980) la teoría de las probabilidades ofrece un modelo matemático para el estudio de los fenómenos aleatorios.

Para Hoel (1980) la probabilidad se aplica a muchas situaciones prácticas, la comprensión de este tema se hace más simple si se aplica a situaciones no prácticas, tales como las que se presentan en los juegos al azar. Por eso razón, las definiciones y las reglas de probabilidades se presentan en función de situaciones ideales, pero se supone que las mismas reglas pueden aplicarse después a las situaciones de la vida real que se presentan en los problemas estadísticos prácticos.

Es significativo el tema de las probabilidades ya que como señala Freund (1990) en sus estudios, la teoría de las probabilidades es tan importante en las ciencias y como en la vida cotidiana ya que al hacer predicciones y decisiones correctas el mayor número de veces posibles, mejores resultados se obtendrán.

Sobre los contenidos a tratar en este tema

Recomendamos a los estudiantes la propuesta del texto de Guerra *et al* (2006), es por ello que las páginas señaladas en este material son dicho texto, y para profundizar ver los contenidos de Hernández (1980). Para ello se les proporcionará más información en la bibliografía de este material.

estimating them, forecasting them, contrasting them and relating them.

The theory of probabilities, on which Statistics is based, constitutes a mathematical theory that as such requires, in general, to make use of a high level of abstract logical reasoning, which often scares people who avoid complications with this theory. science. (Walpole et al., 2008)

According to Hernández (1980), probability theory offers a mathematical model for the study of random phenomena.

For Hoel (1980) probability applies to many practical situations, the understanding of this topic becomes simpler if it is applied to non-practical situations, such as those that occur in games of chance. For this reason, the definitions and rules of probability are presented in terms of ideal situations, but it is assumed that the same rules can later be applied to the real-life situations that arise in practical statistical problems.

The issue of probabilities is significant since, as Freund (1990) points out in his studies, the theory of probabilities is as important in science and in everyday life as making correct predictions and decisions as many times as possible better results will be obtained.

About the contents to be discussed in this topic

We recommend to the students the proposal of the text of Guerra et al (2006), that is why the pages indicated in this material are said text, and to deepen see the contents of Hernández (1980). For this, more information will be provided in the bibliography of this material.

Utilizar la definición 4.1 (**Experimento Aleatorio**), definición 4.2 (**Espacio muestral**), y definición 4.3 (**Suceso o Evento**), todo aparece Guerra *et al* (2006) en la página 66.

Ejemplos:

1. Un tirador dispara al blanco dividido en 4 zonas. El disparo es el experimento aleatorio y el impacto en una zona determinada es el suceso o evento.
2. Lanzar un dado para obtener un número par.
3. Ganar o perder una partida de ajedrez.
4. Sustituir un procedimiento agrícola tradicional por uno con nuevas tecnologías para aumentar los resultados.

Se llama **suceso cierto** cuando ocurre necesariamente como resultado del experimento en cuestión, es decir, si se cumple un conjunto determinado de soluciones S. ($P(A)=1$).

Se llama **suceso falso** cuando el suceso no ocurrirá con certeza, si se cumple el conjunto de condiciones S. ($P(A)=0$).

Se llama **suceso aleatorio** cuando cumpliéndose el conjunto de condiciones S, el suceso o puede ocurrir o bien no puede ocurrir. ($0<P(A)<1$).

La probabilidad de un suceso es uno de los conceptos fundamentales de la teoría de las probabilidades. Se puede decir que la **probabilidad** es un número que caracteriza la posibilidad de que se produzca el suceso.

Recomendamos la definición 4.4 (**clásica**) de la página 69, dada a conocer por Laplace en 1812 y que hace referencia Guerra *et al* (2006): $P(A)=\frac{N_A}{N}$

Esta definición clásica de probabilidad (vía teórica) se aplica a espacios maestrales finitos, planteará la probabilidad para sucesos ciertos, falsos y aleatorios; y expondrá la primera y segunda **Ley de las Probabilidades**. ($0\le P(A)\le 1$ y $P(A^c)=1-P(A)$)

Using definition 4.1 (Random Experiment), definition 4.2 (Sample space), and definition 4.3 (Event or Event), all appear in Guerra et al (2006) on page 66.

Examples:

1- A shooter shoots at the target divided into 4 zones. The shot is the random experiment and the impact in a certain area is the event or event.

2- Roll a die to get an even number.

3- Win or lose a game of chess.

4- Substitute a traditional agricultural procedure for one with new technologies to increase results.

It is called a certain event when it necessarily occurs as a result of the experiment in question, that is, if a given set of solutions is fulfilled. S. ($P(A)=1$).

It is called a false event when the event will not occur with certainty, if the set of conditions is met S. ($P(A)=0$).

It is called a random event when, given the set of conditions S, the event can either occur or cannot occur.. ($0<P(A)<1$).

The probability of an event is one of the fundamental concepts of probability theory. It can be said that the probability is a number that characterizes the possibility of the event occurring.

We recommend definition 4.4 (classical) on page 69, published by Laplace in 1812 and referred to by Guerra et al (2006): $P(A)=\frac{N_A}{N}$

This classic definition of probability (theoretical way) is applied to finite master spaces, it will pose the probability for true, false and random events; and will expound the first and second Law of Probabilities.($0\le P(A)\le 1$ y $P(A^c)=1-P(A)$)

Ejemplo:

1 Utilizar el ejemplo 4.5, incisos b y d, página 70. Si se lanzan dos dados legales, ¿cuál es la probabilidad de que los dados muestren cuantas caras hay arriba que:

b) sean doble.

d) sumen como mínimo 6.

Respuestas:

b) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{6} = 0{,}1666 \approx 16{,}66\%$

d) $P(B) = \frac{26}{36} = 0{,}7222 \approx 72{,}22\%$

Interpretar cada resultado probabilístico y tomar decisiones. (**Ejemplo** de la interpretación: Esperamos que cada vez que lancemos los dados, el 16,66 % de las veces se obtendrán dos números seis o de cada 100 veces que lancemos los dados, se obtendrán aproximadamente 17 casos que sean doble seis. Es más probable que no se obtenga un doble seis al lanzar los dos dados).

En la práctica con frecuencia se encuentran experimentos cuyo número de resultados posibles es infinito, por lo que en estos casos la definición clásica no es aplicable, lo cual es una insuficiencia de esta definición. Además, en la definición clásica se supone que los resultados del experimento son elementales e igualmente posibles, y sin embargo en la práctica se encuentran con frecuencia problemas en los cuales estas condiciones no se cumplen.

Por estas dificultades señaladas, se plantea la definición estadística (**vía experimental**) de un suceso, la cual se basa en el concepto de frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso y que aparece en la página 72 (Guerra *et al*., 2006):

$$f_r(A) = \frac{f_A}{n}$$

Se recomienda por parte de Hernández (1980), el estudio de la definición axiomática de probabilidad dada por Kolmogorov en 1933.

Example:

Use Example 4.5, parts b and d, page 70. If two legal dice are rolled, what is the probability that the dice show how many heads are up that:

b) are double.

d) total at least 6.

Answers:

b) $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{6} = 0{,}1666 \approx 16{,}66\%$

d) $P(B) = \frac{26}{36} = 0{,}7222 \approx 72{,}22\%$

Interpret each probabilistic result and make decisions. (Example of the interpretation: We expect that each time we roll the dice, 16.66% of the time we will get two number sixes or out of every 100 times we roll the dice, we will get approximately 17 cases that are double sixes. What's more likely that you won't get a double six when rolling both dice).

In practice, experiments are often found whose number of possible outcomes is infinite, so in these cases the classical definition is not applicable, which is an insufficiency of this definition. Furthermore, in the classical definition it is assumed that the results of the experiment are elementary and equally possible, and yet in practice problems are frequently encountered in which these conditions are not met.

Due to these aforementioned difficulties, the statistical definition (experimental route) of an event is proposed, which is based on the concept of relative frequency of occurrence of an event and which appears on page 72 (Guerra et al., 2006):

$$f_r(A) = \frac{f_A}{n}$$

Hernández (1980) recommends the study of the axiomatic definition of probability given by Kolmogorov in 1933.

Comentar sobre los experimentos realizados por los matemáticos Bufón y Pearson, con el lanzamiento de la moneda:

Comment on the experiments carried out by the mathematicians Jester and Pearson, with the coin toss:

Experimentador experimenter	**Número de tiradas number of spins**	**Número de caras number of faces**	**Frecuencias frequencies**
Buffon	4040	2048	0.5080
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Recomendamos la definición 4.5 (Sucesos Independientes) en la página 74 y la definición 4.6 (Sucesos Mutuamente Excluyentes) Guerra *et al* (2006) en la página 75.

Ejemplos:

1. Ser periodista y practicar deportes. (Sucesos independientes).
2. La discusión de la Copa de Fútbol entre los equipos de Croacia y Francia en el pasado Mundial de Rusia 2018. (Sucesos mutuamente excluyentes).

Recomendamos el estudio de los siguientes ejemplos: 4.1, página 67; 4.2, página 68; 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6, página 70; 4.7 y 4.8, página 72; 4.10 y 4.11, página 74 y 4.13, página 75. Guerra *et al* (2006).

Ejercicios I (sobre Cálculo de Probabilidades)

1. Se lanzan tres monedas al aire.

a) Determine el espacio muestral.

b) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

A: no salgan caras.

B: salga una cara.

We recommend definition 4.5 (Independent Events) on page 74 and definition 4.6 (Mutually Exclusive Events) Guerra et al (2006) on page 75.

Examples:

1- Being a journalist and playing sports. (Independent events).

2- The discussion of the Soccer Cup between the teams of Croatia and France in the last World Cup in Russia 2018. (Mutually exclusive events).

We recommend studying the following examples: 4.1, page 67; 4.2, page 68; 4.3, 4.4, 4.5 and 4.6, page 70; 4.7 and 4.8, page 72; 4.10 and 4.11, page 74 and 4.13, page 75. Guerra et al (2006).

Exercises I (on Calculus of Probabilities)

1. Se Three coins are tossed into the air.

a) Determine the sample space.

Calculate the probability of the following events:

A: don't come up heads.

C: salgan dos caras.

D: salgan tres caras.

c) Interprete cada valor probabilístico.

Respuestas:

a) E = $\{CCC, CCE, CEC, ECC, CEE, ECE, EEC, EEE\}$
N=8

b) $P_{(A)} = \frac{1}{8} = 0.125$ (12.50 %)

$P_{(B)} = \frac{3}{8} = 0.375$ (37.50 %)

$P_{(C)} = \frac{3}{8} = 0.375$ (37.50 %)

$P_{(D)} = \frac{1}{8} = 0.125$ (12.50 %)

c) Esperamos que cada vez que lancemos las tres monedas el 12.50 % de las veces no se obtendrán caras. (Interpretar los otros valores).

1. En el proceso de siembra de cañas de azúcar es fundamental C (Semilla) para obtener buena calidad comercial. En una caja se tienen 3 fichas técnicas Calidad C1, 5 fichas técnicas de Calidad C2, 8 fichas técnicas de calidad C3 y 4 fichas técnicas de calidad C4 (todas están colocadas sin un orden lógico). Si se desea extraer una ficha técnica de calidad (sin seleccionar y observar en el interior de la caja), determine la probabilidad de que:

a) Sea de C1. f) No sea de C3.

b) No sea de C1. g) Sea de C4.

c) Sea de C2. h) No sea de C4.

d) No sea de C2. i) Sea una ficha de calidad C1, C2, C3 y C4.

e) Sea de C3. j) Sea una ficha C1, C2, C3 o C4.

B: get a head.

C: come out two heads.

D: Three heads come up.

b)Interpret each probabilistic value.

Answers:

a) E = $\{CCC, CCE, CEC, ECC, CEE, ECE, EEC, EEE\}$
N=8

b) $P_{(A)} = \frac{1}{8} = 0.125$ (12.50 %)

$P_{(B)} = \frac{3}{8} = 0.375$ (37.50 %)

$P_{(C)} = \frac{3}{8} = 0.375$ (37.50 %)

$P_{(D)} = \frac{1}{8} = 0.125$ (12.50 %)

c) We expect that every time we toss all three coins 12.50% of the time we will get no heads. (Interpret the other values).

1. In the sugar cane planting process, C (Seed) is essential to obtain good commercial quality. In a box there are 3 technical sheets Quality C1, 5 technical sheets of Quality C2, 8 technical sheets of quality C3 and 4 technical sheets of quality C4 (all are placed without a logical order). If you want to extract a quality data sheet (without selecting and looking inside the box), determine the probability that:

a) be of C1. f) not be of C3.

b) not be of C1. g) be of C4.

c) be of C2. h) not be of C4.

d) not be of C2. i) be a quality token C1, C2, C3 y C4.

e) be of C3. j) be a token C1, C2, C3 o C4.

Respuestas:

Recomendamos hacer un esbozo y debatir los cálculos que se hagan. Hacer hincapié en la interpretación de los valores probabilísticas.

Answers:

We recommend making an outline and discussing the calculations that are made. Emphasize the interpretation of probabilistic values.

3 fichas técnicas C1
5 fichas técnicas C2
8 fichas técnicas C3
4 fichas Técnicas C4

N=20 fichas técnicas

a) $P_{(A)} = 15\ \%$
b) $P_{(B)} = 85\ \%$
c) $P_{(C)} = 25\ \%$
d) $P_{(D)} = 75\ \%$
e) $P_{(E)} = 40\ \%$
f) $P_{(F)} = 60\ \%$
g) $P_{(G)} = 20\ \%$
h) $P_{(H)} = 80\ \%$
i) $P_{(I)} = 0\ \%$
j) $P_{(J)} = 100\ \%$

Interpretar cada valor probabilístico/ Interpret each probabilistic value.

3. Del ejercicio anterior diga:

a) ¿Cuál de los sucesos tiene mayor probabilidad de ocurrencia?

b) Clasifique los sucesos anteriores (en ciertos, imposibles o aleatorios)

Respuestas:

a) Recomendamos eliminar los incisos i) y j) para analizar cuál de los sucesos tiene mayor probabilidad de ocurrencia.

b) Del inciso a) al h) son sucesos aleatorios, el inciso i) es suceso imposible y el inciso j) es un suceso cierto.

3. Se tiene una caja A con 6 bujías Champions y 4 bujías EXON; y en una caja B se tienen 5 bujías Champions y 3 bujías EXON. Si ud. tiene que extraer una bujía EXON, ¿de cuál de las dos cajas lo extraería para lograr una mayor seguridad de que sea la deseada?. ¿Por qué?.

3. From the previous exercise say:

a)Which event is most likely to occur?

b)Classify the above events (in certain, impossible or random)

Answers:

a) We recommend eliminating items i) and j) to analyze which of the events has the highest probability of occurrence.

b) Items a) through h) are random events, item i) is an impossible event, and item j) is a certain event.

3. You have box A with 6 Champions plugs and 4 EXON plugs; and in box B there are 5 Champions plugs and 3 EXON plugs. If you. You have to extract an EXON spark plug, from which of the two boxes would you extract it to achieve greater certainty that it is the desired one? Why?.

Respuestas:

- ✓ Recomendamos utilizar un esbozo para analizar la situación.

Answers:

We recommend using a sketch to analyze the situation.

CAJA A	CAJA B
6 bujías Champions	*5 bujías Champions*
4 bujías EXON	*3 bujías EXON*

N=10 **N=8**

P(A)= 40 %

P(B)= 37.50 % Se extraería de la Caja A ya que P(A) > P(B)/ It would be drawn from Box A since P(A) > P(B).

5. Se muestran a continuación tres cajas que contienen tornillos de diferentes materiales. Si ud. tiene que extraer un tornillo de bronce de una de las tres cajas, de cuál la seleccionaría para lograr con mayor seguridad que obtendrá la deseada?.¿Por qué?

5. Shown below are three boxes containing screws of different materials. If you. You have to extract a bronze screw from one of the three boxes, from which one would you select it to be more sure that you will get the desired one? Why?

CAJA/ Box 1	CAJA/ Box 2	CAJA/ Box 3
6 tornillos de bronce/bronze screws	3 tornillos de bronce bronze screws	9 tornillos de bronce bronze screws
8 tornillos de aluminio/ aluminum screws	4 tornillos de aluminio/ aluminum screws	12 tornillos de cobre/ aluminum screws

Respuesta/ Answer:

- ✓ El ejercicio se conducirá igual que la situación anterior./ The exercise will be conducted in the same way as the previous situation.

$$P(Caja\,1)=\frac{6}{14}=0.4285 \quad (42.85\ \%)$$

$$P(Caja\,2)=\frac{3}{7}=0.4285 \quad (42.85\ \%)$$

$$P(Caja\,3)=\frac{9}{21}=0.4285 \quad (42.85\ \%)$$

- ✓ Interpretar cada resultado/ Interpret each result. (P(Caja 1) = P(Caja 2) = P(Caja 3))

6. Determine cuáles de los siguientes sucesos son independientes y cuáles mutuamente excluyentes:

a) Si lanzamos una moneda y un dado a la vez, obtener el número 5 y un escudo.

6. Determine which of the following events are independent and which are mutually exclusive:

a)If we throw a coin and a die at the same time, we get the number 5 and a shield.

b) Ser estudiante de la Facultad de Ciencias Técnicas de la UNAH y estudiar idioma Inglés.

c) Aprobar el examen final de Química o suspenderlo.

d) Que dos compradores adquieran un producto (solamente queda uno).

e) Que dos ingenieros agrícolas le den solución a un problema por diferentes vías.

f) El otorgamiento de una propiedad intelectual a dos registros de producción que se la adjudican.

Respuestas:

a) Sucesos independientes.

b) Sucesos independientes.

c) Sucesos mutuamente excluyentes.

d) Sucesos mutuamente excluyentes.

e) Sucesos mutuamente excluyentes.

f) Sucesos independientes.

7. La probabilidad de que dos ingenieros agrícolas den la misma solución para resolver un problema es de un 70 %.

¿Cuál es la probabilidad de que sus veredictos sean diferentes?.

Respuestas:

$P(V^c) = 1 - P_{(V)} = 1 - 0.7 = 0.3$ (30 %). Interpretar el resultado probabilístico.

8. Un equipo de investigadores que son ingenieros agrícolas consideran que les falta un integrante más para un nuevo proyecto de investigación. Tras varias pruebas teóricas aplicadas por un asesor a un grupo de aspirantes, quedan en la preselección final tres ingenieros con iguales condiciones que optan por la plaza. Después de una última prueba realizada el aspirante #1

b)Be a student of the Faculty of Technical Sciences of the UNAH and study the English language.

c) Pass the final Chemistry exam or fail it.

d) That two buyers acquire a product (only one remains).

e) That two agricultural engineers solve a problem in different ways.

f) The granting of an intellectual property to two production registries that award it.

Answers:

a) Independent events.

b) Independent events.

c) Mutually exclusive events.

d) Mutually exclusive events.

e) Mutually exclusive events.

f) Independent events.

7. The probability that two agricultural engineers give the same solution to solve a problem is 70%.

What is the probability that their verdicts will be different?

Answers:

$P(V^c) = 1 - P_{(V)} = 1 - 0.7 = 0.3$ (30 %). Interpret the probabilistic result.

8. A team of researchers who are agricultural engineers consider that they are missing one more member for a new research project. After several theoretical tests applied by an advisor to a group of applicants, three engineers with the same conditions remain in the final pre-selection and opt for the position. After a final test, applicant #1 got 5 solutions right and 2 failed; challenger #2 got 4 solutions right

acertó 5 soluciones y falló 2; el aspirante #2 acertó 4 soluciones y falló 2, y el aspirante #3 acertó 8 soluciones y falló 4 (esta prueba se realizó en un tiempo fijo).

a) ¿Cuál de los tres aspirantes usted debe seleccionar? .¿Por qué?

b) Interprete los resultados obtenidos.

c) ¿Qué variable aleatoria se analiza en esta situación? Clasifíquela.

NOTA: La definición de variable aleatoria y su clasificación aparece en el libro de texto Estadística, de la Dra. C. Caridad W. Guerra Bustillo, en el capítulo 5, páginas de la 88 a la 92.

Respuesta:

El estudiante debe analizar la vía de solución de este ejercicio ya que el mismo servirá de consolidación de la actividad. Recomendamos que para la toma de una decisión debe apoyarse en la definición clásica de probabilidad.

and failed 2, and challenger #3 got 8 solutions right and 4 failed (this test was done at a fixed time).

a) Which of the three applicants should you select? .Why?

b) Interpret the results obtained.

c) What random variable is being analyzed in this situation? Classify it.

NOTE: The definition of random variable and its classification appear in the Statistics textbook, by Dra. C. Caridad W. Guerra Bustillo, in chapter 5, pages 88 to 92.

Answer:

The student must analyze the way to solve this exercise since it will serve as a consolidation of the activity. We recommend that a decision should be based on the classic definition of probability.

$$\text{Aspirante \#1} \left\{ \begin{matrix} acertó\ 5\ veces \\ falló\ 2\ veces \end{matrix} \right\} \text{tomó 7 decisiones} \quad P_{(A)} = \frac{5}{7} = 0.7142 \quad (71.42\ \%)$$

$$\text{Aspirante \#2} \left\{ \begin{matrix} acertó\ 4\ veces \\ falló\ 2\ veces \end{matrix} \right\} \text{tomó 6 decisiones} \quad P_{(B)} = \frac{4}{6} = 0.6666 \quad (66.66\ \%)$$

$$\text{Aspirante \#3} \left\{ \begin{matrix} acertó\ 8\ veces \\ falló\ 4\ veces \end{matrix} \right\} \text{tomó 12 decisiones} \quad P_{(C)} = \frac{8}{12} = 0.6666 \quad (66.66\ \%)$$

(Interpretar cada resultado probabilístico). Justificación: Seleccionaría al aspirante #1 ya que la $P_{(A)} > P_{(B)}$ y la $P_{(A)} > P_{(C)}$. Se está analizando la variable aleatoria decisiones tomadas para solucionar un problema (discreta).

(Interpret each probabilistic result). Rationale: I would select the #1 applicant since the $P_{(A)} > P_{(B)}$ y la $P_{(A)} > P_{(C)}$. The random variable decisions made to solve a problem (discrete) are being analyzed.

9. En una caja hay 2 pelotas viejas y 2 pelotas nuevas. Si se extraen dos pelotas a la vez, cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos:

A: No salga ninguna pelota nueva.

9. In a box there are 2 old balls and 2 new balls. If two balls are drawn at the same time, what is the probability that the following events will occur:

A: No new ball comes out.

B: Salga una pelota nueva.

C: Salgan dos pelotas nuevas.

B: Bring out a new ball.

C: Come out two new balls.

Respuesta/Answer:

Realizar un esbozo para facilitar la solución del ejercicio. /Make an outline to facilitate the solution of the exercise.

X: cantidad de pelotas nuevas (variable aleatoria discreta)
X: number of new balls (discrete random variable)

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1V_2 \\ V_1N_1 \\ V_1N_2 \\ V_2N_2 \\ V_2N_1 \\ N_1N_2 \end{array}}$$

N=6

$P_{(X=0)} = \frac{1}{6} = 0.1666$ (16.66 %)

$P_{(X=1)} = \frac{4}{6} = 0.6666$ (66.66 %)

$P_{(X=2)} = \frac{1}{6} = 0.1666$ (16.66 %)

Interpretar cada resultado probabilístico./ Interpret each probabilistic result.

Utilizando este ejercicio como base, se pueden introducir los siguientes contenidos que aparecen en página 89, segundo y tercer párrafos, Guerra *et al* (2006):

Sea p una función de variable **R** discreta que toma valores en un intervalo $[0,1]$ subconjunto de **R**; p es una **función de probabilidad** de una variable aleatoria x si:

$$\sum_{\forall x \in R} p(x) = 1$$

Ejemplo: (Teniendo en cuenta el ejercicio anterior).

Using this exercise as a basis, the following contents that appear on page 89, second and third paragraphs, Guerra et al (2006) can be introduced:

Let p be a function of discrete variable R that takes values on an interval

$[0,1]$ subset of R; p is a probability function of a random variable x if:

$$\sum_{\forall x \in R} p(x) = 1$$

Example: (Taking into account the previous exercise).

$P_{(x=0)} = \frac{1}{6}$; $P_{(x=1)} = \frac{4}{6}$; $P_{(x=2)} = \frac{1}{6}$

$$p(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \; para \; x = 0 \\ \frac{4}{6} \; para \; x = 1 \\ \frac{1}{6} \; para \; x = 2 \\ 0 \; para \; otros \; valores \; de \; x \end{array} \right\}$$

p(x) es una función de probabilidad./ is a probability function.

Luego:

Para toda variable aleatoria existe una función de probabilidad p, que da un valor de probabilidad a cada uno de los valores de la variable aleatoria.

Sea F una función de la variable **R** que toma valores en el intervalo $[0,1]$ subconjunto de **R**, F es una **función de distribución** de una variable aleatoria de x si:

Later:

For every random variable there is a probability function p, which gives a probability value to each of the values of the random variable.

Let F be a function of the variable R that takes values in the interval $[0,1]$ subset of R, F is a distribution function of a random variable of x if:

$$F_x(t) = P(x \le t) \quad \forall x \in R$$

Ejemplo/ Example:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
p(x)	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

x	-∞	0	1	2	$+\infty$
F(x)	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; para \; x \in]-\infty,0[\\ \frac{1}{6} \; para \; x \in [0,1[\\ \frac{5}{6} \; para \; x \in [1,2[\\ 1 \; para \; x \in [2,+\infty[\end{cases}$$

Luego, a toda variable aleatoria, puede asociarse su función de distribución, donde la variable aleatoria puede ser continua o discreta.

Si F es una función discontinua podemos afirmar que x es una variable aleatoria discreta y si F es una función continua podemos afirmar que x es una variable aleatoria continua.

Distribución binomial. Guerra *et al* (2006).Página 93

A partir de este momento se integrarán los conceptos generales sobre las leyes de probabilidad, para describir adecuadamente algunos fenómenos aleatorios que se presentan con frecuencia en la práctica, a partir de la

Then, to every random variable, its distribution function can be associated, where the random variable can be continuous or discrete.

If F is a discontinuous function we can say that x is a discrete random variable and if F is a continuous function we can say that x is a continuous random variable.

Binomial distribution. Guerra et al (2006). Page 93

From this moment, the general concepts about the laws of probability will be integrated, to adequately describe some random phenomena that frequently occur in practice, starting from the determinación de la ley de probabilidad que estos siguen.

Cuando la variable en estudio se clasifica como discreta las distribuciones teóricas de probabilidad que siguen pueden ser: Distribución de Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Poisson, Uniforme, Exponencial, etc.

En muchos casos, si el problema en cuestión que se analiza, cumple con las propiedades de estas distribuciones, podemos realizar con éxito la aplicación deseada.

Ejemplo:

- Lanzar un dado 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan 3 escudos?.
- La probabilidad de que un equipo agrícola pueda ser reparado en la Universidad es un 40 %. Si se sabe que 15 máquinas están pendiente de reparación. ¿Cuál es la probabilidad de que se puedan reparar?.
- Una máquina produce tornillos para arados y la probabilidad de tornillo defectuoso es 0,02. Calcular la probabilidad de que una caja contenga 2 tornillos defectuosos si se conoce que cada caja contiene 100 tornillos.

Un experimento a menudos consiste en pruebas repetidas, cada una con dos posibles resultados el éxito y el fallo. El proceso se denomina proceso de Bernoulli y cada ensayo un experimento de Bernoulli.

El Proceso de Bernoulli tiene las siguientes propiedades:

1. El experimento consiste en n pruebas que se repiten.
2. Cada prueba produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota con p. permanece constante en cada prueba.

determination of the law of probability that they follow.

When the variable under study is classified as discrete, the following theoretical probability distributions can be: Bernoulli, Binomial, Hypergeometric, Poisson, Uniform, Exponential, etc.

In many cases, if the problem in question that is analyzed meets the properties of these distributions, we can successfully carry out the desired application.

Example:

- Roll a die 5 times. What is the probability that 3 shields are obtained?
- The probability that a farm equipment can be repaired at the University is 40%. If it is known that 15 machines are pending repair. What is the probability that they can be repaired?
- A machine produces plow bolts and the probability of a defective bolt is 0.02. Find the probability that a box contains 2 defective screws if it is known that each box contains 100 screws.

An experiment often consists of repeated trials, each with two possible outcomes: success and failure. The process is called a Bernoulli process and each trial a Bernoulli experiment.

The Bernoulli Process has the following properties:

1- The experiment consists of n trials that are repeated.

2- Each trial produces a result that can be classified as a success or failure.

3- The probability of a success, denoted by p. remains constant in each trial.

4- The tests that are repeated are independent.

4. Las pruebas que se repiten son independientes.

El número X de éxitos en n experimentos de Bernoulli se denomina variable aleatoria binomial. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama distribución binomial y se denota como b(x,n,p).

Distribución Binomial: Guerra *et al* (2006), página 93. Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad q= 1 – p. Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, el número de éxitos en n pruebas independientes, es:

The number X of successes in n Bernoulli experiments is called a binomial random variable. The probability distribution of this discrete random variable is called the binomial distribution and is denoted b(x,n,p).

Binomial Distribution: Guerra et al (2006), page 93. A Bernoulli experiment can result in a success with probability p and a failure with probability q= 1 p. Then the probability distribution of the binomial random variable X, the number of successes in n independent trials, is:

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-q} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

donde:

n: es el número de pruebas independientes realizadas

x: es el número de éxito

p: probabilidad de ocurrencia de un éxito

Notación: X ~ b(n,p)

Valor esperado de X, E(X) = np

Varianza de X, V(X) = npq

Ejemplo:

Si lanzamos una moneda 5 veces. Calcule la probabilidad de obtener 3 caras n=5.

where:

n: is the number of independent tests performed

x: is the number of success

p: probability of occurrence of a success

Notation: X ~ b(n,p)

Expected value of X, E(X) = np

Variance of X, V(X) = npq

Example:

If we flip a coin 5 times. Find the probability of getting 3 heads n=5.

Respuesta/Answer:

x=3 $\quad p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$

$$P(x=3) = \frac{5!}{3!(5-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10\frac{1}{8}\frac{1}{4} = \frac{10}{32} = 0{,}3125$$ Interpretar el resultado.

El estudiante puede hacer uso de la tabla estadística de la distribución binomial y llegar a la misma solución. Además, se recomienda el estudio y la solución que se propone en el ejemplo de Guerra *et al* (2006) .5.4, página 118.

The student can make use of the statistical table of the binomial distribution and arrive at the same solution. In addition, the study and solution proposed in the example of Guerra et al (2006) .5.4, page 118 is recommended..

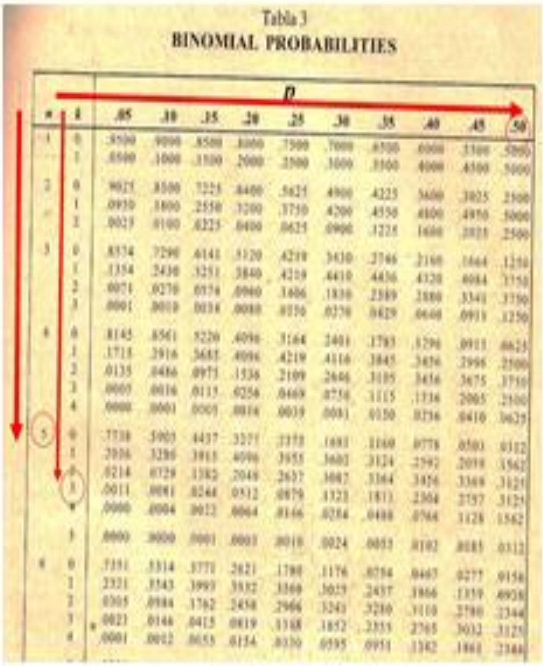
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

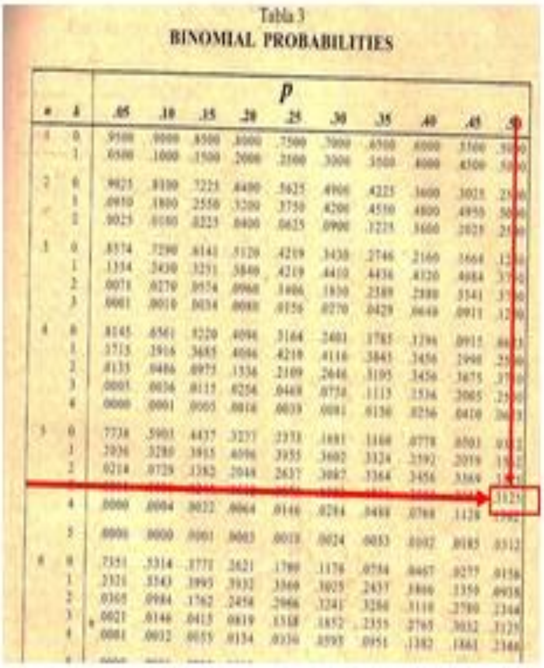
Utilizando el ejemplo anterior, se explica cómo debe utilizarse la tabla para obtener el valor probabilístico:

- Por la columna vertical se localiza el valor n=5, y dentro de este el valor x=3.
- Por la línea horizontal se localiza el valor p=0,5.
- La intercepción de ambas (la vertical y la horizontal) nos proporcionan el valor de probabilidad que se necesita.

Using the example above, it is explained how the table should be used to obtain the probabilistic value:

- By the vertical column the value n=5 is located, and within this the value x=3.
- The horizontal line shows the value p=0.5.
- The intercept of both (the vertical and the horizontal) gives us the probability value that is needed.





En ocasiones nos interesa encontrar P(x< t) o P(a≤ x≤ b). A continuación proponemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

La probabilidad de que un equipo agrícola pueda ser reparado en la Universidad es un 40 %. Si se sabe que 15 máquinas están pendientes de reparación. ¿Cuál es la probabilidad de que se puedan reparar?:

Al menos 10 equipos.

Entre 4 y 7 equipos.

Exactamente 5 equipos.

El estudiante debe trabajar con la tabla de la distribución binomial

Sometimes we are interested in finding P(x(t) or P(a≤ x≤ b). We now propose the following example.

Example:

The probability that a farm equipment can be repaired at the University is 40%. If it is known that 15 machines are pending repair. What is the probability that they can be repaired?

At least 10 teams.

Between 4 and 7 teams.

Exactly 5 teams.

The student must work with the table of the binomial distribution

Respuestas/Answer:

a) $p = 0,4$ $n = 15$ $x_1 = 10$, $x_2 = 11$, $x_3 = 12$, $x_4 = 13$, $x_4 = 14$ y $x_6 = 15$ (al menos 10)

$P(x \geq 10) = P(x=10) + P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) + P(x=15)$

$= 0,0245+0,074+0,016+0,003+0,000 = 0,2465$

Interpretar el resultado/ interpret the result

.

b) $P(4 \leq x \leq 7) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7)$

$= 0,1268+0,1853+0,2066+0,1771 = 0,6958$

Interpretar el resultado/ interpret the result

c) P(x=5) = 0,1853 . Interpretar el resultado/ interpret the result.

Distribución de Poisson. Guerra *et al* (2006) .Página 96.
Muchas veces ocurre que el número de peticiones del experimento muy grande y la aplicación de la Distribución Binomial se hace muy laboriosa. Cuando esto ocurre existe otra distribución teórica denominada *Distribución de Poisson.*

Los experimentos que dan valores numéricos de una variable X, el número de resultados que ocurren durante un intervalo dado o en una región específica, se llama experimentos de Poisson.
Ejemplo: El número de llamadas telefónicas por horas que recibe una oficina, el número de juegos suspendidos debido a la lluvia durante la temporada de béisbol, etc.

La distribución de Poisson se aproxima a la distribución binomial cuando p es muy pequeña y se define como:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \lambda = np$$

Ejemplo: Una máquina produce tornillos para arados y la probabilidad de tornillo defectuoso es 0,02. Calcular la probabilidad de que una caja contenga 2 tornillos defectuosos si se conoce que cada caja contiene 100 tornillos.

Poisson distribution. Guerra et al (2006). Page 96.
It often happens that the number of requests for the experiment is very large and the application of the Binomial Distribution becomes very laborious. When this occurs, there is another theoretical distribution called the Poisson Distribution.

Experiments that give numerical values of a variable X, the number of outcomes that occur during a given interval or in a specified region, are called Poisson experiments.

Example: The number of hourly phone calls an office receives, the number of games called off due to rain during baseball season, etc.

The Poisson distribution approximates the binomial distribution when p is very small and is defined as:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \lambda = np$$

Example: A machine produces plow bolts and the probability of a defective bolt is 0.02. Find the probability that a box contains 2 defective screws if it is known that each box contains 100 screws

Respuesta/Answer:

N=100
P= 0,02
n.p =100. 0,02 =2 <5 por tanto la aproximación es adecuada/ therefore the approximation is adequate..

$$P(x=2) = \frac{e^{-2}2^{2}}{2!} = \frac{4e^{-2}}{2} = 2e^{-2} = 0,271$$. Interpretar el resultado/ interpret the result.

Ejemplo:

La probabilidad de que un equipo de bombeo se descomponga al cabo de 900 horas de trabajo es de 0,004. Si se seleccionan al azar 1000 equipos con

Example:

The probability that a pump unit breaks down after 900 hours of work is 0.004. If 1,000 teams with 900

900 horas o más de trabajo, calcular la probabilidad de que se descompongan 4 equipos.

or more hours of work are randomly selected, find the probability that 4 teams break down.

Respuesta/Answer:

N=1000

P= 0,004

np =1000. 0,004 =4 <5 por tanto la aproximación es adecuada.

$$P(x=2)=\frac{e^{-4}4^{4}}{4!}=\frac{256e^{-4}}{24}=0{,}196.$$ Interpretar el resultado.

NOTA IMPORTANTE:

- El uso de la tabla estadística (páginas 9 a la 12) del texto Selección de Tablas Estadísticas es acumulativa y se explica a continuación:

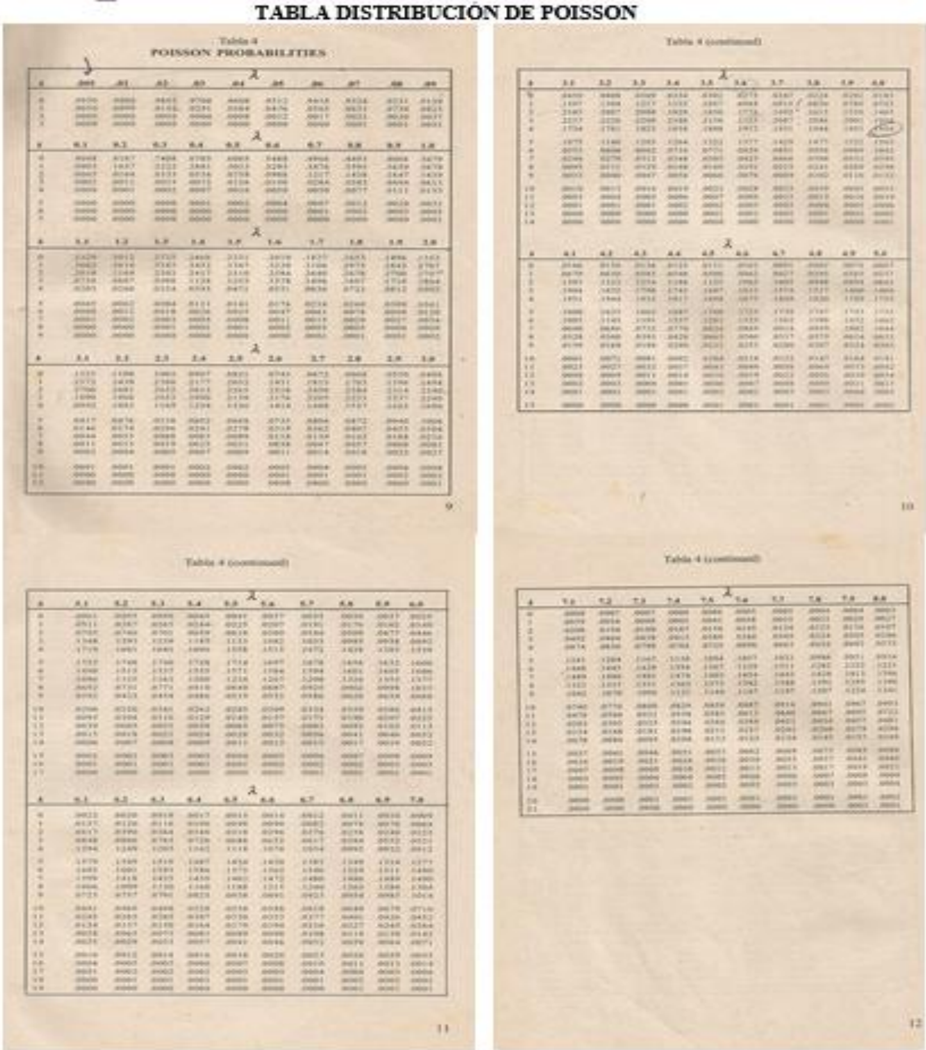
IMPORTANT NOTE:

- The use of the statistical table (pages 9 to 12) of the text Selection of Statistical Tables is cumulative and is explained below:

Para $\lambda=2$ $P(x=2)=P(x \le 2) - P(x \le 1) = 0{,}677-0{,}406 = 0{,}271$

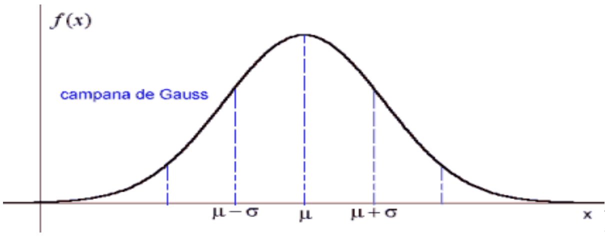
Para $\lambda= 4$ $P(x=4) =P(x \le 4) - P(x \le 3) = 0{,}629-0{,}433 = 0{,}196$

TABLA DISTRIBUCIÓN DE POISSON



¿Qué ocurre cuando se trabaja con una variable continua que describe una gráfica continua?

What happens when you work with a continuous variable that describes a continuous graph?



Función continua/ continuous function..

- Sea F una función **R** integrable; f es una **función de densidad** probabilística si $f_{(x)} \geq 0$ para todo $x \in R$ y:
- Let F be an integrable function R; f is a probability density function if $f_{(x)} \geq 0$ for all $x \in R$ y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(x)} dx = 1$$ (Guerra *et al.*, 2006) página 90

La **función de densidad** caracteriza a la variable aleatoria continua, a partir de las funciones de distribución.

The **density function** characterizes the continuous random variable, from the distribution functions.

Ejemplo:

La cantidad de piezas que puede elaborar en una hora un tornero, es una variable aleatoria y tiene la siguiente función de probabilidad:

Example:

The number of pieces that a turner can make in one hour is a random variable and has the following probability function:

x	$-\infty$	0	2	4	5	6	$+\infty$
p(x)	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0

x: variable aleatoria discreta

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; para \; x \in \left]-\infty, 0\right[\\ \frac{1}{8} \; para \; x \in \left[0, 2\right[\\ \frac{7}{24} \; para \; x \in \left[2, 4\right[\\ \frac{13}{24} \; para \; x \in \left[4, 5\right[\\ \frac{7}{8} \; para \; x \in \left[5, 6\right[\\ 1 \; para \; x \in \left[6, +\infty\right[\end{cases}$$

F(x) es una función de distribución/ F(x) is a distribution function.

Propiedades:

- El valor esperado de una variable aleatoria (o de cualquier función de la variable aleatoria),

Properties:

- The expected value of a random variable (or any function of the random se obtiene hallando el valor medio de la función para todos los posibles valores de la variable, este valor esperado es una media teórica o ideal.

variable), is obtained by finding the mean value of the function for all possible values of the variable, this expected value is a theoretical or ideal mean.

$$\mu = E_{(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum x P_{(x)}\ ,\ si\ x\ es\ discreta \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(x)} dx\ ,\ si\ x\ es\ continua \end{array} \right\}$$

(Guerra *et al*., 2006) página 91, definición 5.2

- Si x es una variable aleatoria con valor esperado E(x), la varianza de x se representa por V(x) o σ^2 y se puede expresar como:

- If x is a random variable with expected value E(x), the variance of x is represented byV(x) o σ^2 and can be expressed as:

$$\sigma^2 = V_{(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum \left| x - E_{(x)} \right|^2 P_{(x)}\ ,\ si\ x\ es\ discreta \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x - E_{(x)} \right|^2 f_{(x)} dx\ ,\ si\ x\ es\ continua \end{array} \right\}$$

(Guerra *et al*., 2006) página 92, definición 5.3

- El **teorema central del límite** constituye una de las conclusiones más importantes dentro de la Estadística:

- **ElThe Central Limit Theorem** constitutes one of the most important conclusions in Statistics:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ a \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \right\} = \Phi_{(b)} - \Phi_{(a)}$$ simétricamente en a y b, Con

$\mu = E_{(x)}$ y $\sigma^2 = V_{(x)} > 0$

symmetrically in a and b, with $\mu = E_{(x)}$ y $\sigma^2 = V_{(x)} > 0$ (Linares, 1990) página 135

Un gran número de fenómenos naturales y procesos técnicos ponen en juego una o más variables aleatorias. A menudo, mientras el fenómeno no se haya producido o la operación no se haya efectuado, todo lo que podemos conocer de estas variables aleatorias son sus funciones de distribución.

A large number of natural phenomena and technical processes bring into play one or more random variables. Often, as long as the phenomenon has not occurred or the operation has not been performed, all we can know about these random variables is their distribution functions.

Cuando una variable en cuestión puede tomar infinidad de valores distintos, por ejemplo, el caso de la distancia recorrida por un proyectil o una flecha, o la amplitud de un error de medida; lo mejor es indicar las probabilidades, no ya de tales o cuales valores particulares, sino globalmente, las probabilidades correspondientes a intervalos.

Este teorema es fruto de los trabajos de Chebyshev (1821 – 1894), Harkov (1856 – 1922) y Liapunov (1857 – 1918), aunque el teorema del límite de De Moivre-Laplace es considerado un caso especial del teorema central del límite de la teoría de las probabilidades.

La **ley de los grandes números** establece como a medida que incrementamos el número de muestras mucho más exacto será el valor esperado:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \mu\right| > \xi\right\} \to 0$$

(Hernández, 1980) página 340

Sea x_k una sucesión de variables aleatorias independientes con una distribución o ley de probabilidad común. Supongamos que $\mu = E_{(x)}$ y $\sigma^2 = V_{(x)}$ existen. Si $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ es el valor promedio de dicha sucesión, entonces la variable aleatoria $y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ tendrá una función de densidad que se aproximará a la distribución normal cuando el valor de n sea suficientemente grande.

Distribución Normal (*o campana de Gauss-Laplace)*

Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en

When a variable in question can take an infinity of different values, for example, the case of the distance traveled by a projectile or an arrow, or the amplitude of a measurement error; it is best to indicate the probabilities, not just of such or such particular values, but globally, the probabilities corresponding to intervals.

This theorem is the result of the works of Chebyshev (1821 1894), Harkov (1856 1922) and Liapunov (1857 1918), although the De Moivre-Laplace limit theorem is considered a special case of the central limit theorem of the theory of the odds.

The law of large numbers establishes that as we increase the number of samples, the expected value will be much more exact:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \mu\right| > \xi\right\} \to 0$$

(Hernández, 1980) page 340

Be x_k a sequence of independent random variables with a common probability distribution or law. Let's suppose $\mu = E_{(x)}$ y $\sigma^2 = V_{(x)}$ exist. If $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ is the average value of that sequence, then the random variable $y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ will have one density function that will approximate the normal distribution when the value of n is large enough.

Normal distribution (or bell *Gauss-Laplace)*

This distribution is frequently used in statistical applications. Its very name indicates its widespread use, justified by the frequency or normality with which certain phenomena su comportamiento a esta distribución. (Guerra *et al*., 2006).

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana.

En otras ocasiones, al considerar distribuciones binomiales, tipo B(n,p), para un mismo valor de *p* y valores de *n* cada vez mayores, se ve que sus polígonos de frecuencias se aproximan a una curva en "forma de campana".

En resumen, la importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal:

- *Caracteres morfológicos* de individuos (personas, animales, plantas...) de una especie, por ejemplo: tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros,...
- *Caracteres fisiológicos*, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- *Caracteres sociológicos*, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.
- *Caracteres psicológicos*, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio...
- *Errores* cometidos al medir ciertas magnitudes.
- *Valores estadísticos* muestrales, por ejemplo: la media.
- *Otras distribuciones* como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales.
- Y en general cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

Función de Densidad

Empleando cálculos bastante laboriosos, puede demostrarse que el modelo de la **función de densidad** que corresponde a tales distribuciones viene dado por la fórmula:

tend to resemble this distribution in their behavior. (War et al., 2006).

Many continuous random variables have a density function whose graph is bell-shaped.

On other occasions, when considering binomial distributions, type B(n,p), for the same value of p and increasing values of n, it is seen that their frequency polygons approximate a "bell-shaped" curve.

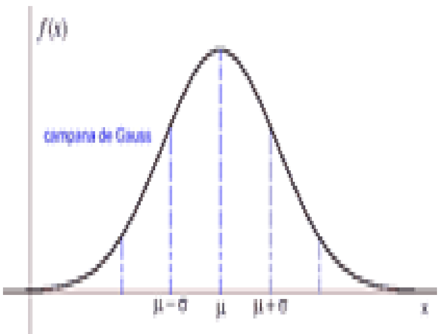
In summary, the importance of the normal distribution is mainly due to the fact that there are many variables associated with natural phenomena that follow the model of the normal:

- Morphological characteristics of individuals (people, animals, plants...) of a species, for example: sizes, weights, wingspans, diameters, perimeters,...
- Physiological characteristics, for example: effect of the same dose of a drug, or of the same amount of fertilizer.
- Sociological characteristics, for example: consumption of a certain product by the same group of individuals, test scores.
- Psychological characteristics, for example: intellectual quotient, degree of adaptation to an environment...
- Errors made when measuring certain magnitudes.
- Sample statistical values, for example: the mean.
- Other distributions such as the binomial or Poisson are normal approximations.
- And in general, any characteristic that is obtained as the sum of many factors.

Density Function

Using rather laborious calculations, it can be shown that the density function model corresponding to such distributions is given by the formula:

Dominio:	$Dom\ f = \mathbb{R}$
Máximo:	$\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
P. inflexión:	*en* $x = \mu + \sigma$ *y* $x = \mu - \sigma$
Asíntotas:	*el eje OX es una asíntota horizontal*
Simetrías:	*respecto a la recta* $x = \mu$
Monotonía:	*creciente* $(-\infty, \mu)$, *decreciente* $(\mu, +\infty)$
Signo:	*es siempre positiva*
P. Corte:	$OY \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$



Función de Densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ media	$\pi = 3,1415...$
σ desv típica	$e = 2,7182...$
σ^2 varianza	x abcisa

$N(\mu,\sigma)$

$N(\mu,\sigma)$

Para cada valor de μ y σ tendremos una función de densidad distinta,

por tanto la expresión $N(\mu,\sigma)$ representa una familia de distribuciones normales.

Función de Distribución

- Puede tomar cualquier valor $(-\infty, +\infty)$
- Son más probables los valores cercanos a uno central que llamamos μ
- Conforme nos separamos de ese valor μ, la probabilidad va decreciendo de igual forma a derecha e izquierda (es simétrica).
- Conforme nos separamos de ese valor μ, la probabilidad va decreciendo de forma más o menos rápida dependiendo de un parámetro σ, que es la desviación típica .

Distribution Function

- It can take any value $(-\infty, +\infty)$
- Values close to a central one, which we call the mean, are more likely μ
- As we part from that value μ, the probability decreases equally to the right and left (it is symmetric).
- As we part from that value μ, the probability decreases more or less rapidly depending on a parameter σ, what is the standard deviation .

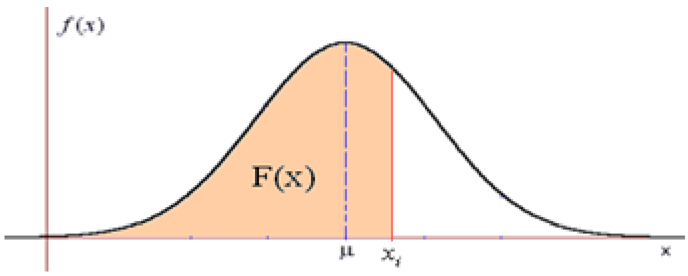
Función de Distribución

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$F(x)=P(X \leq x)$

F(x) es el área sombreada de esta gráfica.



Si la variable X es $N(\mu,\sigma)$ entonces la variable tipificada de X es

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ y sigue también una distribución normal pero

de $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir, $N(0,1)$

Tipificación

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad ; -\infty < z < +\infty$$

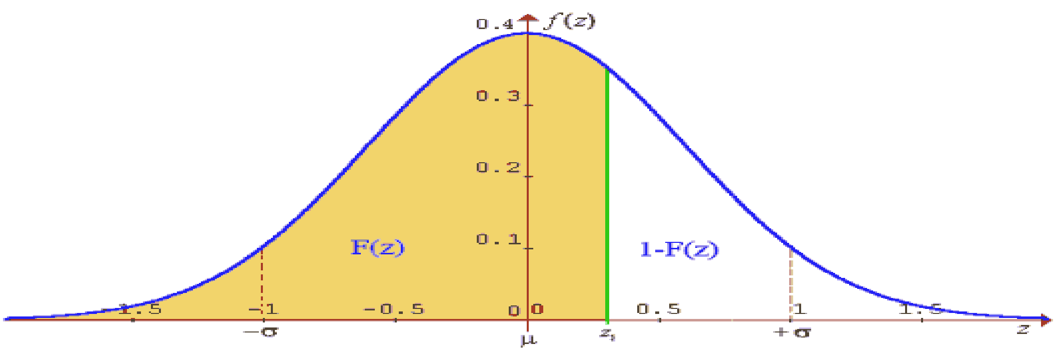
Por tanto su función de densidad es/ So its density function is:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

y su función de distribución es siendo la representación gráfica de esta función/

and its distribution function is being the graphical representation of this function:

:



a la variable Z se la denomina *variable tipificada de X*, y a la curva de su función de densidad *curva normal tipificada*./ the variable Z is called a standardized variable of X, and the curve of its function of standard curve normal density.

Característica de la distribución normal tipificada (reducida, estándar)

- No depende de ningún parámetro
- Su media es 0, su varianza es 1 y su desviación típica es 1.
- La curva *f(x)* es simétrica respecto del eje OY
- Tiene un máximo en este eje
- Tiene dos puntos de inflexión en z =1 y z = -1

Aproximación de la Binomial por la Normal (Teorema de *De Moivre)*:

Characteristic of the standardized (reduced, standard) normal distribution

- Does not depend on any parameter
- Its mean is 0, its variance is 1, and its standard deviation is 1.
- The curve f(x) is symmetric about the axis OY
- have a maximum on this axis
- It has two inflection points at z = 1 and z = -1

Approximation of the Binomial by the Normal (De Moivre's Theorem):

$$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

y, por tanto, la variable

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{es} \quad N(0,1) \quad \rightarrow \quad \text{Teorema de De Moivre}$$

Demostró que bajo determinadas condiciones (para *n* grande y tanto *p* como *q* no estén próximos a cero) la distribución Binomial B(n, p) se puede aproximar mediante una distribución normal:

$$np \geq 5 \ \ y \ \ nq \geq 5$$

Debemos tener en cuenta que cuanto mayor sea el valor de n, y cuanto más próximo sea p a 0.5, tanto mejor será la aproximación realizada. Es decir, basta con que se verifique gracias a esta aproximación es fácil hallar probabilidades binomiales, que para valores grandes de n resulten muy laboriosos de calcular.

Hay que tener en cuenta que para realizar correctamente esta transformación de una variable discreta (binomial) en una variable continua (normal) es necesario hacer una corrección de continuidad.

He showed that under certain conditions (for n large and both p and q not close to zero) the Binomial distribution B(n, p) can be approximated by a normal distribution:

$$np \geq 5 \ \ y \ \ nq \geq 5$$

We must bear in mind that the higher the value of n, and the closer p is to 0.5, the better the approximation will be. That is, it is enough that it is verified thanks to this approximation, it is easy to find binomial probabilities, which for large values of n are very laborious to calculate.

It must be taken into account that in order to correctly carry out this transformation of a discrete (binomial) variable into a continuous (normal) variable, it is necessary to make a continuity correction

$$P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$$

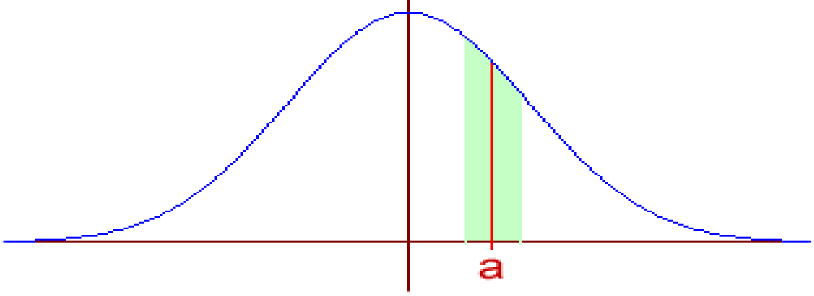
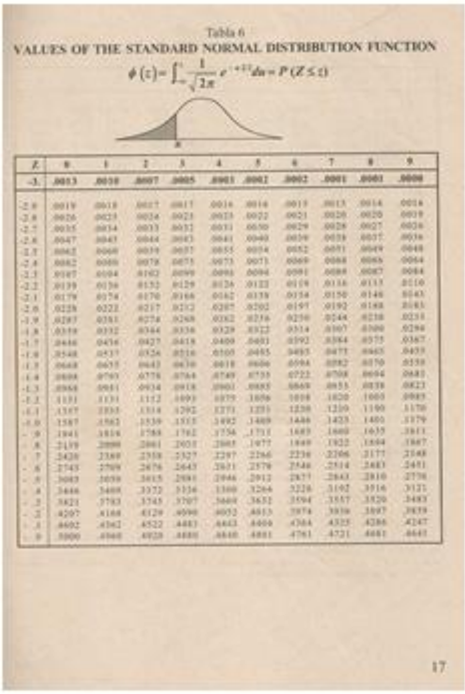
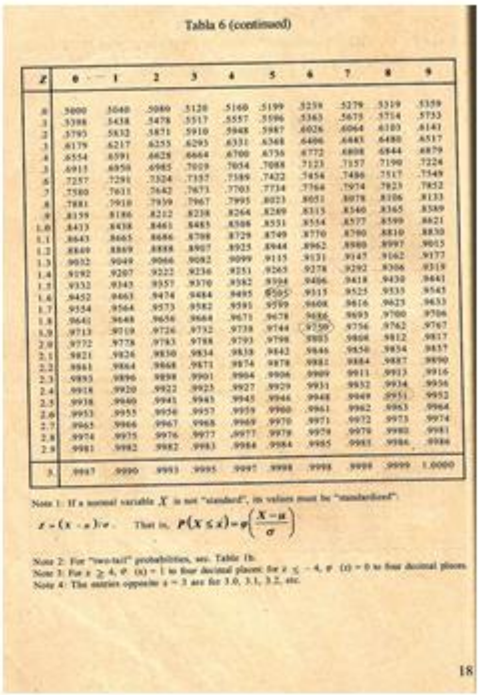


TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA





Ejemplos:

La media del peso de 500 estudiantes de la UNAH “Fructuoso Rodríguez Pérez” es de 68.6 kg y la desviación estándar es de 6.8 kg. Si los valores están normalmente distribuidos, calcule el porciento de estudiantes que pesan:

a) Menos de 58,1 kg.

Hay que transformar el dato de la siguiente forma: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{58{,}1-68{,}6}{6{,}8} = -1{,}54$

Buscamos en la tabla de la distribución normal tipificada el percentil 1,54 y obtenemos el valor de probabilidad 0,9382.

Luego, 1 - 0,9382 = 0,0618, por lo tanto hay un 6,18 % de probabilidad de encontrar estudiantes que pesen menos de 58,1 kg.

Examples:

The mean weight of 500 UNAH Fructuoso Rodríguez Pérez students is 68.6 kg and the standard deviation is 6.8 kg. If the values are normally distributed, find the percent of students who weigh:

a) Less than 58.1kg.

You have to transform the data as follows:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{58{,}1-68{,}6}{6{,}8} = -1{,}54$$

We look for the 1.54 percentile in the standard normal distribution table and obtain the probability value 0.9382.

Then, 1 - 0.9382 = 0.0618, so there is a 6.18% chance of finding students who weigh less than 58.1 kg.

b) more than 81,1 kg.

b) Más de 81,1 kg.

Hay que transformar el dato de la siguiente forma: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{81,1-68,6}{6,8} = 1,83$

Buscamos en la tabla de la distribución normal tipificada el percentil 1,54 y obtenemos el valor de probabilidad 0.9664.

Luego, 1 – 0.9664 = 0,0336, por lo tanto hay un 3,36 % de probabilidad de encontrar estudiantes que pesen más de 81,1 kg.

c) Entre los 58,1 kg y 81,1 kg.

Ya tengo los datos transformados, entonces a 0,9664 – 0,0618 = 0.9046, por lo tanto hay un 90,46 % de probabilidad de encontrar estudiantes que pesen entre los 58,1 kg y 81,1 kg.

Otras distribuciones

1. La función de densidad de la **distribución Chí-cuadrada** es:

$$f_{(x)} = k_v x^{(v-2)/2} e^{-x/2} \quad \text{cuando } x > 0$$

$$f_{(x)} = 0 \qquad \text{cuando } x \leq 0$$

donde r son los grados de libertad y k_r es una constante que depende de r (página 104, definición 5.7).

Cuando r es grande (r > 30) la distribución χ^2 se aproxima a la distribución normal. Esta distribución fue introducida por F. R. Helment en 1876.

2. La función de densidad de la **distribución t-student** es:

$$f_{(t)} = \frac{k_r}{\left(1+t^2/r\right)^{(r+1)/2}} \quad para\ -\infty < t < +\infty$$

donde k_r es una constante que depende de r (página 106, definición 5.8).

You have to transform the data as follows:
$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{81,1-68,6}{6,8} = 1,83$

We look for the 1.54 percentile in the standard normal distribution table and obtain the probability value 0.9664.

Then, 1 0.9664 = 0.0336, so there is a 3.36% chance of finding students who weigh more than 81.1 kg.

c) Between 58.1 kg and 81.1 kg.

I already have the data transformed, so at 0.9664 0.0618 = 0.9046, therefore there is a 90.46% chance of finding students weighing between 58.1 kg and 81.1 kg.

Other distributions

1. The density function of the Chi-square distribution is:

$$f_{(x)} = k_v x^{(v-2)/2} e^{-x/2} \quad \text{when } x > 0$$

$$f_{(x)} = 0 \qquad \text{when } x \leq 0$$

where r are the degrees of freedom and k_r is a constant that depends on r (page 104, definition 5.7).

When r is large (r > 30) the distribution χ^2 approaches the normal distribution. This distribution was introduced by F. R. Helment in 1876.

2. The density function of the **t-student distribution** is:

$$f_{(t)} = \frac{k_r}{\left(1+t^2/r\right)^{(r+1)/2}} \quad para\ -\infty < t < +\infty$$

where k_r is a constant that depends on r (page 106, definition 5.8).

Cuando r crece, la variable t tiende a la normal con valor medio cero y varianza 1. Esta distribución fue introducida por W. S. Gosset, el cual realizó publicaciones bajo el nombre de t-student en 1908.

3. La función de densidad de la **distribución F de Fisher** es:

$$f_{(F)} = \frac{kF^{(v_1-2)/2}}{\left(1 - r_1 F / r_2\right)^{(r_1+r_2)/2}}$$

para F>0

donde k es una constante que depende de r_1 y r_2 , y r_1 y r_2 son los grados de libertad. Guerra *et al* (2006). definición ,5.9 .página 109.

Esta distribución la expuso R. A. Fisher en 1924 y es de considerable interés práctico. Cuando n crece, esta distribución se aproxima a la normal.

Generalmente los valores tabulados de la distribución t-student, Chí-cuadrada y F de Fisher reciben el nombre de percentiles.

As r increases, the variable t tends to the normal with mean value zero and variance

1. This distribution was introduced by W. S. Gosset, who published under the name of t-student in 1908.

3. The density function of the **Fisher F distribution** is:

$$f_{(F)} = \frac{kF^{(v_1-2)/2}}{\left(1 - r_1 F / r_2\right)^{(r_1+r_2)/2}} \quad \text{for } F>0$$

where k is a constant that depends on r_1 y r_2 , y r_1 y r_2 are the degrees of freedom. War et al (2006). definition ,5.9 .page 109.

This distribution was exposed by R. A. Fisher in 1924 and is of considerable practical interest. As n increases, this distribution approaches the normal.

Generally, the tabulated values of the t-student, Chi-square and Fisher's F distributions are called percentiles.

Ejemplo/Example:

a) $\chi^{2(r)}_{p} = \chi^{2(20)}_{0.95} = 31{,}4$

b) $\chi^{2(r)}_{p} = \chi^{2(20)}_{0.05} = 10{,}9$

c) $t^{(r)}_{p} = t^{(20)}_{0.95} = 1{,}72$

d) $t^{(r)}_{p} = \chi^{2(20)}_{0.99} = 2{,}53$

e) $F^{(r_1,r_2)}_{p} = F^{(10,6)}_{0.95} = 4{,}06$

f) $F^{(r_1,r_2)}_{p} = F^{(10,6)}_{0.99} = 7{,}87$

Todas estas distribuciones teóricas de probabilidades están tabuladas, lo cual facilita la aplicación de ellas a problemas prácticos.

Como hemos visto, la conclusión del teorema central del límite es sumamente importante, ya que nos permite aproximar

All of these theoretical probability distributions are tabulated, which makes it easy to apply them to practical problems.

As we have seen, the conclusion of the central limit theorem is extremely important, since it allows us to approximate any distribution to a normal one and do the cualquier distribución a una normal y hacer los cálculos a través de ella. Es por eso que afirmamos, al ver las distribuciones, que la distribución normal es la más importante, ya que a medida que n sea mayor, mejor será el ajuste a la distribución normal y por ende más exactos los cálculos que realicemos por aproximación.

EJERCICIOS II (sobre Distribuciones Teóricas de Probabilidades)

1. La media del peso de 272 estudiantes del Tecnológico de Agrícola ubicado en Güines, es de 54.4 kg y la desviación estándar es de 6.2 kg. Si los valores están normalmente distribuidos, calcule el porciento de estudiantes que pesan:

a) Menos de 52.1 kg. b) Más de 53.8 kg. c) Menos de 56.8 kg.

b) Más de 58.6 kg. e) Entre 51.4 kg y 55.1 kg.

Respuesta:

- ✓ Le recomendamos a los estudiantes apoyarse en un algoritmo de pasos que permita al estudiantes unificar el procedimiento de solución:

A. Extraer los datos.

B. Representar gráficamente la Curva Normal.

C. Plantear la fórmula de transformación $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

D. Representar la Curva Normal Estándar.

E. Dar la respuesta.

- ✓ Además, el estudiante debe trabajar con la Tabla Estadística sobre la Distribución Normal.

calculations through it. That is why we affirm, when looking at the distributions, that the normal distribution is the most important, since the higher n is, the better the fit to the normal distribution will be and therefore the more exact the calculations that we carry out by approximation.

EXERCISES II (on Theoretical Probability Distributions)

1. The mean weight of 272 students from the Agricultural Technological Institute located in Güines is 54.4 kg and the standard deviation is 6.2 kg. If the values are normally distributed, find the percent of students weighing

a) less than 52.1 kg. b) more than 53.8 kg. c) less than 56.8 kg.

b) more than 58.6 kg. e) between 51.4 kg and 55.1 kg.

Answer:

- ✓ We recommend that students rely on an algorithm of steps that allows students to unify the solution procedure:

A- Extract the data.

B- Plot the Normal Curve.

C- Write the transformation formula $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

D- Plot the Standard Normal Curve.

E- Give the answer.

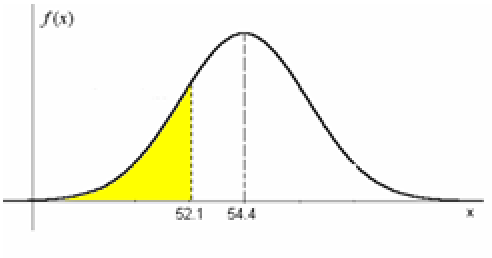
- ✓ In addition, the student must work with the Statistical Table on the Normal Distribution

a) Datos:

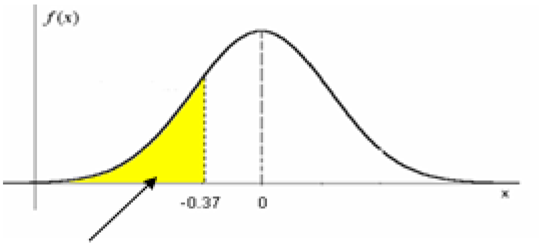
$\mu = 54.4kg$

$\sigma = 6.2kg$

$x = 52.1kg$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{52.1-54.4}{6.2} = -0.37 \;/$$



0.3557

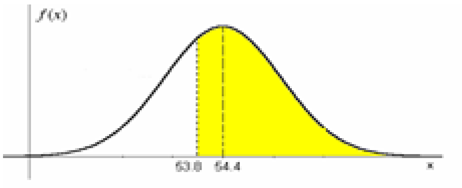
El porciento de estudiantes que pesan menos de 52.1 kg es de 35.57 %./ The percentage of students weighing less than 52.1 kg is 35.57 %.

b) Datos:

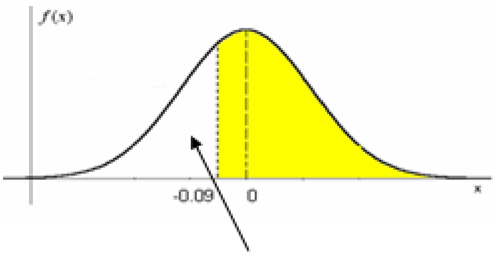
$\mu = 54.4kg$

$\sigma = 6.2kg$

$x = 53.8kg$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{53.8-54.4}{6.2} = -0.09$$



0.4641

Luego, obtenemos que 1 – 0.4641 = 0.5359

El porciento de estudiantes que pesan más de 53.8 kg es de 53.59 %.

Then we get that 1- 0.4641 = 0.5359

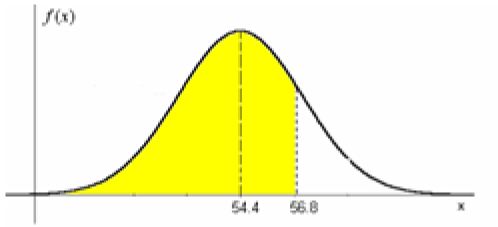
The percentage of students who weigh more than 53.8 kg is53.59 %.

c) Datos:

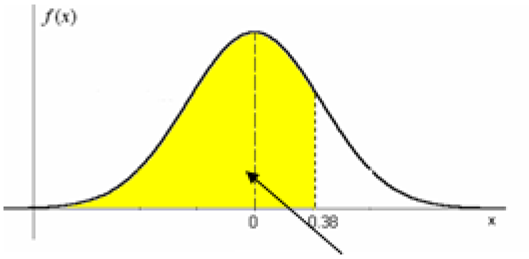
$\mu = 54.4kg$

$\sigma = 6.2kg$

$x = 56.8kg$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{56.8-54.4}{6.2} = 0.38$$



0.6480

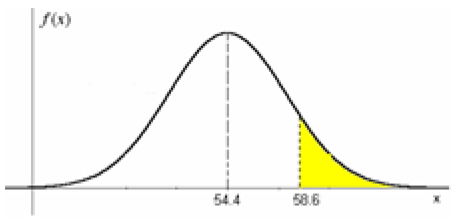
El porciento de estudiantes que pesan menos de 56.8kg es de 64.80 %./ The percentage of students weighing less than 56.8kg is 64.80 %.

d) Datos:

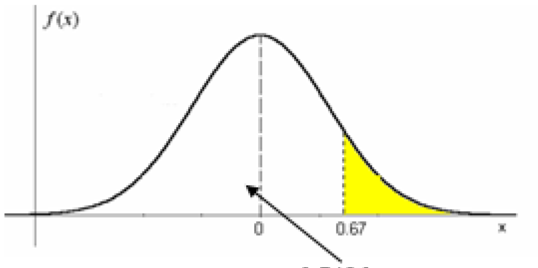
$\mu = 54.4kg$

$\sigma = 6.2kg$

$x = 58.6kg$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{58.6-54.4}{6.2} = 0.67$$



0.7486

Luego, obtenemos que 1 – 0.7486 = 0.2514.

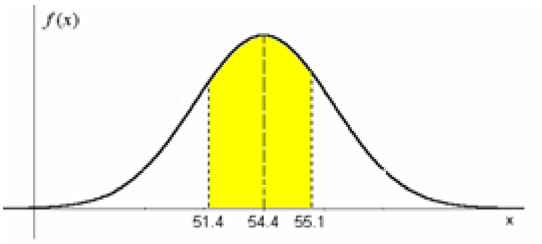
El porciento de estudiantes que pesan más de 58.6 kg es de 25.14 %.

Then we get that 1-0.7486 = 0.2514.

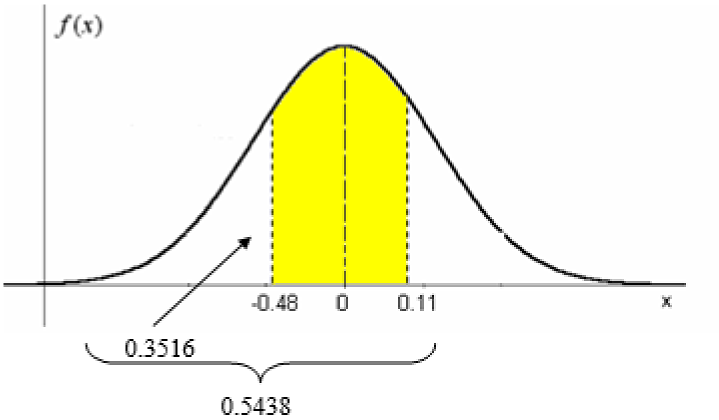
The percentage of students who weigh more than 58.6 kg is 25.14 %.

e) Datos:

$\mu = 54.4kg$
$\sigma = 6.2kg$
$x_1 = 51.4kg$
$x_2 = 55.1kg$



$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{51.4 - 54.4}{6.2} = -0.48$$
$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{55.1 - 54.4}{6.2} = 0.11$$



Luego, obtenemos que 0.5438 – 0.3516 = 0.1922/ Then we get that 0.5438 0.3516 = 0.1922

El porciento de estudiantes que pesan entre los 51.4 kg y 55.1 kg es de 19.22 %.
The percentage of students weighing between 51.4 kg and 55.1 kg is
19.22 %.

- Teniendo en cuenta el enunciado del ejercicio anterior, determine la cantidad de estudiantes, de la población analizada, que representa cada porciento obtenido./

Taking into account the statement of the previous exercise, determine the number of students, of the analyzed population, that represents each percentage obtained.

1.

Respuestas/Answer:

a) $p = \dfrac{X}{N} \Rightarrow X = N.p = 272 * 0.3557 = 96.7504 \approx 97$

Aproximadamente son 97 estudiantes los que pesan menos de 52.1 kg.
Approximately 97 students weigh less than 52.1 kg.

b) $p = \dfrac{X}{N} \Rightarrow X = N.p = 272 * 0.5359 = 145.7648 \approx 146$

Aproximadamente son 146 estudiantes los que pesan más de 53.8 kg.
Approximately 146 students weigh more than 53.8 kg.

c) $p = \frac{X}{N} \Rightarrow X = N.p = 272 * 0.6480 = 176.2560 \approx 176$

Aproximadamente son 176 estudiantes los que pesan menos de 56.8 kg.
Approximately 176 students weigh less than 56.8 kg.

d) $p = \frac{X}{N} \Rightarrow X = N.p = 272 * 0.2514 = 68.3808 \approx 68$

Aproximadamente son 68 estudiantes los que pesan más de 58.6 kg.
Approximately 68 students weigh more than 58.6 kg.

e) $p = \frac{X}{N} \Rightarrow X = N.p = 272 * 0.1922 = 52.2784 \approx 52$

Aproximadamente son 52 estudiantes los que pesan entre 51.4 kg y 55.1 kg.
Approximately 52 students weigh between 51.4 kg y 55.1 kg.

2. Se asegura que en el 35 % de todas las instalaciones fototérmicas los gastos de servicios se reducen al menos en una tercera parte. De acuerdo con lo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que se reduzcan al menos en una tercera parte de:

a) Cuatro de 5 instalaciones.

b) En al menos cuatro de 5 instalaciones.

Respuestas

El estudiante debe analizar las condiciones que propicia el problema y que conducen a la aplicación de la Distribución Binomial: Variable aleatoria discreta (Cantidad de Instalaciones fototérmicas).

- It is ensured that in 35% of all photothermal installations, service costs are reduced by at least a third. Based on the above, what is the probability that they will be reduced by at least one third of:

a) Four of 5 installations.

b) In at least four of 5 installations.

Answers

The student must analyze the conditions that cause the problem and that lead to the application of the Binomial Distribution: Discrete random variable (Number of Photothermal Installations).

a) $P_{(x=4)} = 0.0488$ (4.88 %) Interpretar el resultado./ Interpret the result.

b) $P_{(x\geq4)} = P_{(x=4)} + P_{(x=5)} = 0.0488 + 0.0053 = 0.0541$ (5.41 %)

Interpretar el resultado./ Interpret the result.

3. Si la probabilidad de que cierta columna falle ante una carga axial específica es 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 16 de tales columnas

a) Como máximo dos fallen.

b) Al menos cuatro fallen.

- If the probability that a certain column fails under a specific axial load is 0.5. What is the probability that among 16 such columns

a) At most two fail.

b) At least four fail.

Respuestas/Answer:

a) $P_{(x\leq 2)} = P_{(x=0)} + P_{(x=1)} + P_{(x=2)} = 0 + 0.002 + 0.0018 = 0.0020$ (0.20 %)

Interpretar el resultado./ Interpret the result.

b) $P_{(x\geq 4)} = P_{(x=4)} + \ldots + P_{(x=16)} = 1 - P_{(x\leq 2)} = 1 - 0.0020 = 0.9980$ (99.80 %)

Interpretar el resultado./ Interpret the result.

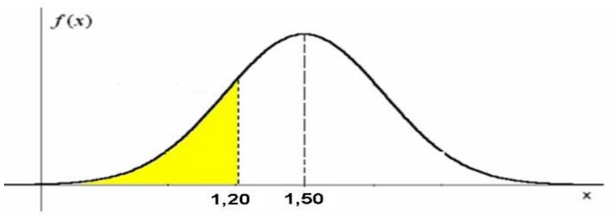
5. El costo de producción de cierto artículo sigue una distribución normal con media y varianza de 1,50 pesos y 0,20 pesos^2 respectivamente. Si se selecciona un artículo al azar calcule e interprete la probabilidad de que el precio sea:

The production cost of a certain item follows a normal distribution with mean and variance of 1.50 pesos and 0.20 pesos^2 respectively. If an item is selected at random, find and interpret the probability that the price is:

a) Inferior a 1,20 pesos./ Less than 1.20 pesos.

b) Entre 1,00 y 1,60 pesos./ Between 1.00 and 1.60 pesos.
c) Superior a 1,00 pesos./ Over 1.00 pesos.

Respuestas/Answer:

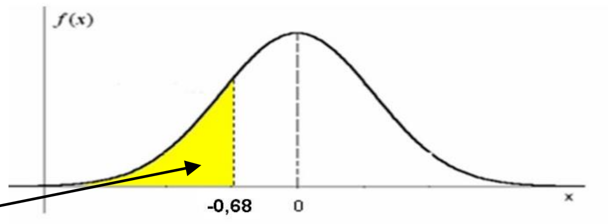


a) Datos/ Data:

$$\mu = 1{,}50\, pesos$$
$$\sigma^2 = 0{,}20\, pesos^2$$
$$\sigma = 0{,}44\, pesos$$
$$x = 1{,}20\, pesos$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1{,}20 - 1{,}50}{0{,}44} = -0.68$$

0.2483



La probabilidad de que el precio del artículo sea inferior a 1,20 pesos es de un 24.83 %.

Se espera que cada vez que se seleccione al azar un artículo producido, el 24.83 % de las

The probability that the price of the item is less than 1.20 pesos is 24.83%.

It is expected that each time a produced item is randomly selected, 24.83% of the time it will veces tendrá un costo de producción inferior a los 1,20 pesos.

have a production cost of less than 1.20 pesos..

b) Datos:

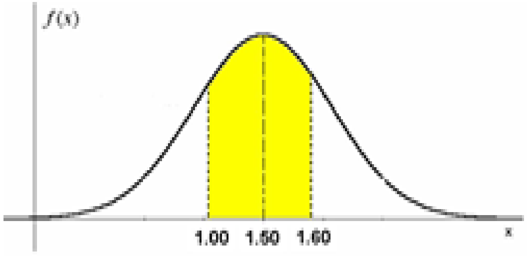
$\mu = 1{,}50 \text{ pesos}$

$\sigma^2 = 0{,}20 \text{ pesos}^2$

$\sigma = 0{,}44 \text{ pesos}$

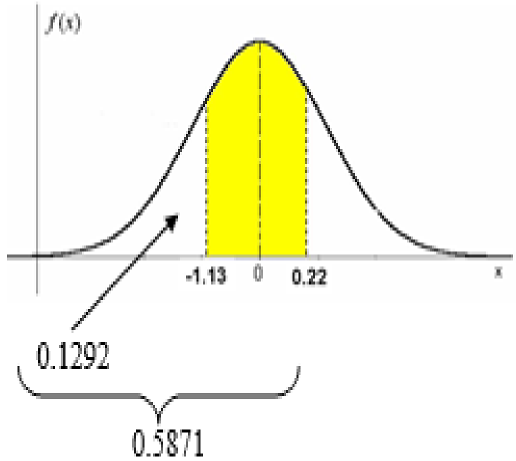
$x_1 = 1{,}00 \text{ pesos}$

$x_2 = 1{,}60 \text{ pesos}$



$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1.00 - 1.50}{0.44} = -1.13$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1.60 - 1.50}{0.44} = 0.22$$



Luego, obtenemos que 0.5871 – 0.1292 = 0.4579.

La probabilidad de que el precio del artículo este entre 1,00 y 1,60 pesos es de un 45.79 %.

Se espera que cada vez que se seleccione al azar un artículo producido, el 45.79 % de las veces tendrá un costo de producción entre 1,00 y 1,60 pesos.

Then we get that 0.5871 0.1292 = 0.4579.

The probability that the price of the item is between 1.00 and 1.60 pesos is 45.79%.

It is expected that each time a produced item is randomly selected, 45.79% of the time it will have a production cost between 1.00 and 1.60 pesos

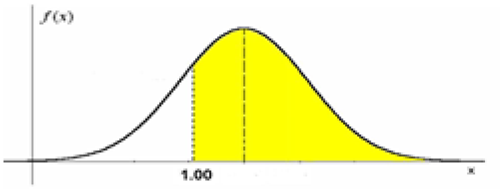
c) Datos

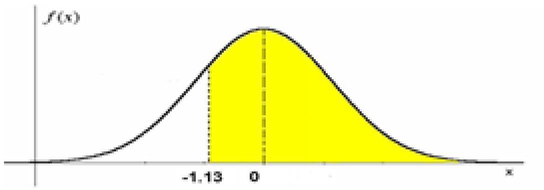
$\mu = 1{,}50\ pesos$

$\sigma^2 = 0{,}20\ pesos^2$

$\sigma = 0{,}44\ pesos$

$x = 1{,}00\ pesos$





$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1.00 - 1.50}{0.44} = -1.13$$

0.1292

Luego, obtenemos que 1 – 0.1292 = 0.8708

La probabilidad de que el precio del artículo sea superior al 1,00 pesos.es de un 87.08 %.

Se espera que cada vez que se seleccione al azar un artículo producido, el 87.08 % de las veces tendrá un costo superior al 1,00 pesos.

6. Una prueba de aptitud de graduados en Ingeniería en Procesos Agroindustriales refleja resultados que se aproximan a la distribución Normal con media de 500 y desviación típica de 100.

a) Si se selecciona un grupo al azar de los que se le aplicaron la prueba de aptitud, qué por ciento de las calificaciones se espera se encuentren entre 300 y 700.

b) De 10 000 calificaciones realizadas, cuántas se debe esperar que: b_1) sean de 525 o menos; b_2) sean de 675 o más.

Then we get that 1 0.1292 = 0.8708

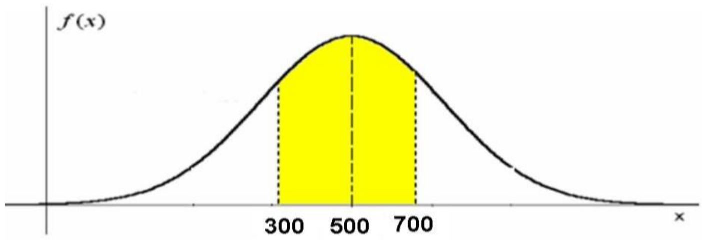
The probability that the price of the item is higher than 1.00 pesos is 87.08%.

It is expected that each time an item produced is randomly selected, 87.08% of the time it will cost more than 1.00 pesos.

6. An aptitude test for graduates in Agroindustrial Process Engineering reflects results that approximate the Normal distribution with a mean of 500 and a standard deviation of 100.

a) If a group of aptitude test takers is randomly selected, what percent of the scores are expected to be between 300 and 700?

b) Of 10,000 grades given, how many should be expected to: b1) be 525 or less; b2) are 675 or more.

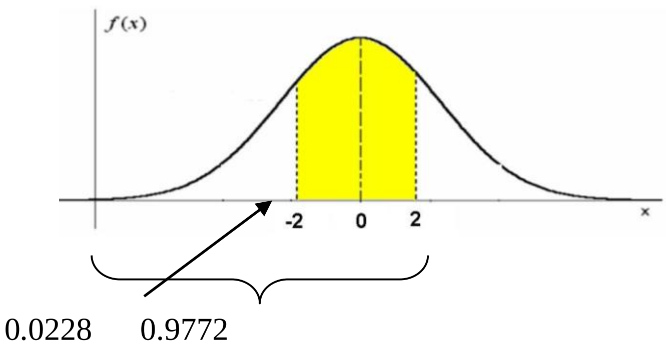


Respuesta/Answer:

a) Datos/Data:

$$\mu = 500\,puntos$$
$$\sigma = 100\,puntos$$
$$x_1 = 300\,puntos$$
$$x_2 = 700\,puntos$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{300 - 500}{100} = -2 \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{700 - 500}{100} = 2$$



Luego, obtenemos que 0.9772 – 0.0228 = 0.9544 (95.44 %) (Interprete el resultado)

El por ciento de las calificaciones en la prueba de aptitud que está entre los 300 y los 700 puntos es de un 95.44 %.

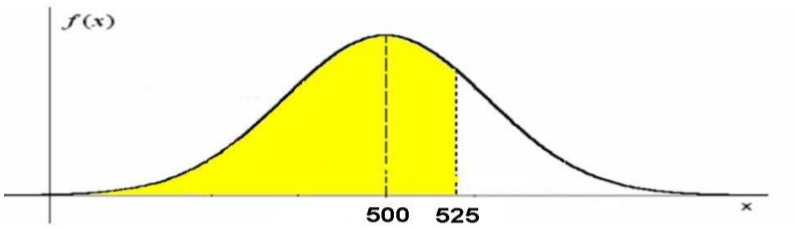
Se espera que cada vez que se seleccione al azar un estudiante que realizó la prueba de aptitud, el 95.44 % de las veces tendrá entre 300 y 700 puntos.

Then we get that 0.9772 -0.0228 = 0.9544 (95.44%) (Interpret the result)

The percentage of qualifications in the aptitude test that is between 300 and 700 points is 95.44%.

It is expected that each time a student who took the aptitude test is randomly selected, 95.44% of the time they will have between 300 and 700 points.

b1) Datos/Data:

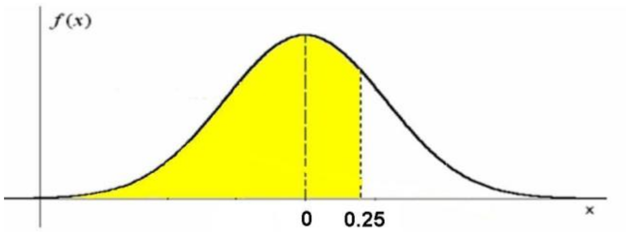


$\mu = 500\, puntos$

$\sigma = 100\, puntos$

$x = 525\, puntos$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{525 - 500}{100} = 0.25$$



Luego, la probabilidad es de 0.5987 (59.87 %). Al aplicar la regla de tres se obtiene que:

Then the probability is 0.5987 (59.87%). Applying the rule of three it is obtained that:

Si 10 000 son el 100 % de las calificaciones entones el 59.87 % será

If 10,000 is 100% of the grades, then 59.87% will be

$$x = \frac{59.87 * 10000}{100} = 5987$$

Por lo tanto, se espera que 5 978 calificaciones tendrán 525 puntos o menos.

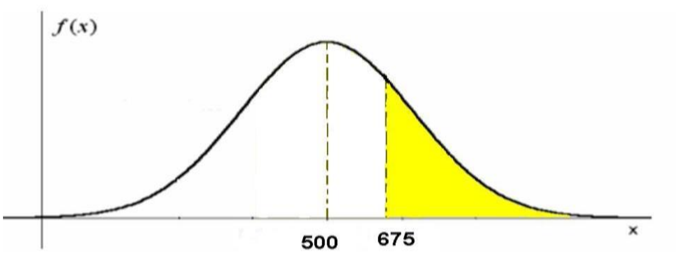
Therefore, 5,978 scores are expected to be 525 points or lower.

b2) Datos:

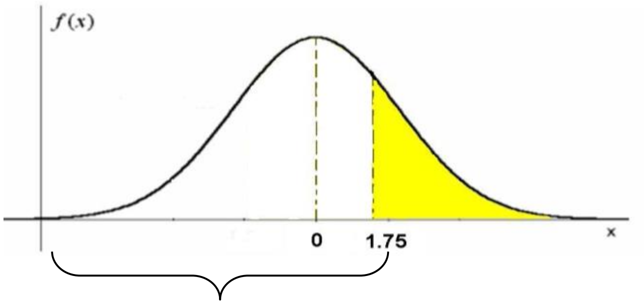
$\mu = 500\, puntos$

$\sigma = 100\, puntos$

$x = 675\, puntos$



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{675 - 500}{100} = 1.75$$



0.9599

Luego, obtenemos que 1 – 0.9599 = 0.0401 (4.01 %). / Then we get that 1 0.9599 = 0.0401 (4.01%).

Al aplicar la regla de tres se obtiene que:

Si 10 000 son el 100 % de las calificaciones entones el 4.01 % será

$$x = \frac{4.01*10000}{100} = 401$$

Por lo tanto, se espera que 401 calificaciones tendrán 675 puntos o más.

Applying the rule of three it is obtained that:

If 10,000 is 100% of the grades, then 4.01% will be

$$x = \frac{4.01*10000}{100} = 401$$

Therefore, 401 scores are expected to be 675 points or higher.

Bibliografía / References

Bacchini, R. D; Vázquez, L. V; Bianco, M. J. 2018. Introducción a la probabilidad y a la estadística. Facultad de Ciencias Económicas. Buenos Aires. Argentina. Disponible en: http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Bacchini_Introduccion-a-la-probabilidad-y-a-la-estadistica-2018.pdf

Bouza, C. N; Sistachs, V. 2010. Estadística: Teoría Básica y Ejercicios. Editorial Félix Varela. La Habana. 406 p.

Egaña, E. 2003. La Estadística: herramienta fundamental en la investigación pedagógica. Editorial Pueblo y Educación. 404 p.

Freund, J. E. 1990. Estadística Elemental Moderna. Editorial Pueblo y Educación. 461p.

Hernández, L. M. 1980. Probabilidades. Editorial Pueblo y Educación. 352 p.

Hoel, P. 1980. Estadística Elemental. Editorial Revolucionaria. 302 p.

Guerra, C. W; Hernández, E; Barrero, R; Egaña, E. 2006. Estadística. Editorial “Félix Varela”. La Habana. Cuba. 376 p.

Gmurman, V. E. 1979. Teoría de las Probabilidades y Estadísticas Matemáticas. Editorial Pueblo y Educación: 420 p.

Linares, G. 1990. Probabilidades y Estadística. Editorial Pueblo y Educación. 411p.

Miller, I; Freund, J. E; Johnson, R. 2008. Probabilidades y estadísticas para ingenieros. Prentice Hall. México. 624 p.

Walpole, R. E; Myers, R. M; Myers, S. L. 2008. Probabilidad y estadística para ingenieros. Parte I. Sexta Edición. Prentice Hall. México. 739 p.