

Modelación matemática de la cinética de crecimiento de bacterias ácido lácticas para su uso aditivo microbiano en la alimentación animal.

Mathematical modeling of the growth kinetics of lactic acid bacteria for its microbial additive use in animal feed.

Ing. Arleny Pérez Arencibia

1-Universidad Agraria de La Habana “Fructuoso Rodríguez Pérez”.
Autopista Nacional, carretera Tapaste, km 23 ½, San José de Las Lajas,
Mayabeque

Instituto de Ciencia Animal

*Autor para correspondencia: arlenys.perez@etcса.cu

Resumen

En el presente trabajo se realizó una revisión de la literatura sobre la aplicación de la modelación matemática, de la cual se concluye que existe un interés bastante grande por la comunidad académico-científica por fortalecer los diferentes sectores. La modelación matemática se ha convertido en una herramienta de gran utilidad para la solución de problemas latentes tanto Agropecuarios como agrícolas, facilita el tratamiento de datos y la toma de decisiones complejas. Se estudiaron las etapas en el desarrollo de la modelación, las propiedades de los modelos y su clasificación, así como sus aplicaciones. Se presentan los modelos matemáticos con el objetivo de describir los procesos de crecimiento microbiano, dentro de los modelos que más se utilizan para este análisis, son la ecuación logística y la ecuación del modelo *Gompertz*, además con un estudio de sensibilidad de las principales variables respuestas del modelo, llegar a obtener los parámetros que más afectan las predicciones en un intervalo de variación en el tiempo. A través del modelo matemático se determinan las relaciones entre

las variables lo que permite conocer el comportamiento de sistemas complejos, también permite comparar varios tratamientos con los resultados de la modelación, igualmente con los datos reales de la fermentación, con lo cual se demuestra la eficacia de un modelo matemático.

Palabras claves: *modelo matemático, crecimiento, microbiano, académico-científico*

Summary

In the present work, a review of the literature on the application of mathematical modeling was carried out, from which it is concluded that there is quite a great interest by the academic-scientific community to strengthen the different sectors. Mathematical modeling has become a very useful tool for solving latent agricultural and agricultural problems, facilitating data processing and complex decision-making. The stages in the development of the modeling, the properties of the models and their classification, as well as their applications were studied. The mathematical models are presented with the aim of describing the microbial growth processes, within the models that are most used for this analysis, they are the logistic equation and the Gompertz model equation, in addition to a sensitivity study of the main response variables. of the model, get to obtain the parameters that most affect the predictions in an interval of variation over time. Through the mathematical model, the relationships between the variables are determined, which allows to know the behavior of complex systems, it also allows comparing several treatments with the results of the modeling, also with the real data of the fermentation, with which the effectiveness is demonstrated. of a mathematical model.

Keywords: mathematical model, growth, microbial, academic-scientific.

Recibido: 10 de enero de 2022

Aprobado: 2 de febrero de 2022

Introducción

El uso de los modelos se ha incrementado en las últimas décadas gracias al perfeccionamiento de los sistemas de cómputo y a la necesidad de complementar el entendimiento sobre la naturaleza. A través del planteamiento de modelos en términos de las expresiones formales de las relaciones entre las variables involucradas en un proceso, ha sido posible describir y explicar un sin número de fenómenos.

Introduction

The use of models has increased in recent decades thanks to the improvement of computer systems and the need to complement the understanding of nature. Through the approach of models in terms of the formal expressions of the relationships between the variables involved in a process, it has been possible to describe and explain a number of phenomena.

Un modelo constituye una representación o abstracción de la realidad. En un modelo matemático se establece un conjunto de relaciones definidas, compuestas por un grupo de variables que reflejan la esencia de los fenómenos en el objeto de estudio. La facilidad que brindan las nuevas tecnologías ayuda en poco tiempo a efectuar comparaciones que permitan la correcta elección de un modelo adecuado, que describa los datos en problemas de ingeniería, así como proporciona elementos de juicio suficientes para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Nagel (2002) mostró que el mejoramiento de los diseños de control en el proceso permite una mejor fermentación y proporciona oportunidades para escalar dichos procesos. La modelación matemática es una herramienta que ayuda al enfoque de la investigación científica, la que ha sido utilizada ampliamente para resolver problemas y permite expresar matemáticamente las relaciones entre los fenómenos que lo afectan.

El concepto de modelación consiste en la búsqueda de expresiones matemáticas que representen el sistema en estudio. Según (Ferrando, et al. 2017), un modelo es un conjunto de ecuaciones que describe cómo los diversos fenómenos que ocurren durante el proceso se combinan para controlar su rendimiento. Además, los modelos son la base para evaluar la fermentación y tienen vital importancia en el diseño del equipamiento y los criterios de control.

Por otra parte, (Mitchell et al. 2010) describen el término de modelo matemático como una simplificación de la realidad. Plantean además, que la modelación es quien decide qué fenómenos son los que se incluyen, sobre la base de la experiencia con el sistema de trabajo. Los modelos son más que una forma simple de resumir los datos experimentales que describen el comportamiento del proceso, pues se pueden utilizar para predecir el rendimiento e identificar los parámetros óptimos de diseño y operación.

Un modelo matemático es una representación

A model constitutes a representation or abstraction of reality. In a mathematical model, a set of defined relationships is established, made up of a group of variables that reflect the essence of the phenomena in the object of study. The ease offered by new technologies helps in a short time to make comparisons that allow the correct choice of a suitable model, which describes the data in engineering problems, as well as provides sufficient elements of judgment for decision-making under conditions of uncertainty.

Nagel (2002) showed that improving process control designs allows for better fermentation and provides opportunities to scale those processes. Mathematical modeling is a tool that helps the approach of scientific research, which has been widely used to solve problems and allows to mathematically express the relationships between the phenomena that affect it.

The modeling concept consists of the search for mathematical expressions that represent the system under study. According to (Ferrando, et al. 2017), a model is a set of equations that describes how the various phenomena that occur during the process are combined to control its performance. Furthermore, the models are the basis for evaluating fermentation and are of vital importance in equipment design and control criteria.

On the other hand, (Mitchell et al. 2010) describe the term mathematical model as a simplification of reality. They also propose that modeling is the one who decides which phenomena are included, based on experience with the work system. Models are more than a simple way to summarize experimental data that describe process behavior, as they can be used to predict performance and identify optimal design and operating parameters.

A mathematical model is an idealized

idealizada expresada en términos de símbolos, expresiones matemáticas y sistemas de ecuaciones relacionadas que describen la esencia del problema, posibilitando así tomar decisiones cuantificables relacionadas unas con otras, reconocidas como variables de decisión.

La modelación y estudio de fenómenos asociados a sistemas dinámicos, en particular de crecimiento, ha sido objeto de análisis desde hace muchísimo tiempo en diversos campos de aplicación, habiendo experimentado un gran auge en las últimas décadas. El motivo principal para ello radica en la necesidad de comprender los mecanismos de evolución de los sistemas con el fin de dar una explicación a su comportamiento, permitiendo predecir el mismo sin perder de vista la posible inclusión de influencias ajenas a las variables en estudio que permitan alterar dicho comportamiento y, con ello, tener la posibilidad de controlar externamente la evolución del fenómeno en consideración.

Los modelos matemáticos son hipótesis existentes entre las relaciones matemáticas de las variables medibles y no medibles en sistema, procesos o experimentación. Actualmente, el uso de modelos matemáticos se ha incorporado para facilitar la toma de decisiones y es aplicado en diversos sectores con resultados muy satisfactorios. Algunos ejemplos de sus usos en la agricultura son: modelos para la producción de bienes, modelos para determinar el rendimiento de los sistemas logísticos, modelos de ruteo de vehículos, entre otros.

Desarrollo

El desarrollo de modelos para describir los fenómenos biológicos y de transporte durante el proceso fermentativo mejoró la comprensión de muchos aspectos en diferentes ámbitos.

1. Modelado estadístico y matemático en

representation expressed in terms of symbols, mathematical expressions and systems of related equations that describe the essence of the problem, thus making it possible to make quantifiable decisions related to each other, recognized as decision variables.

The modeling and study of phenomena associated with dynamic systems, particularly growth systems, has been the object of analysis for a long time in various fields of application, having experienced a great boom in recent decades.

The main reason for this lies in the need to understand the mechanisms of evolution of the systems in order to give an explanation to their behavior, allowing it to be predicted without losing sight of the possible inclusion of influences unrelated to the variables under study that allow alter said behavior and, with it, have the possibility of externally controlling the evolution of the phenomenon under consideration.

Mathematical models are hypotheses between the mathematical relationships of measurable and non-measurable variables in systems, processes or experimentation. Currently, the use of mathematical models has been incorporated to facilitate decision-making and is applied in various sectors with very satisfactory results. Some examples of its uses in agriculture are: models for the production of goods, models to determine the performance of logistics systems, vehicle routing models, among others.

Developing

The development of models to describe the biological and transport phenomena during the fermentation process improved the understanding of many aspects in different settings.

procesos Agropecuarios y agrícolas.

En el sector agrícola existen problemas complejos que requieren el uso de herramientas y tecnologías para su solución y así hacer que los sistemas agrícolas funcionen adecuadamente dando cumplimiento a las necesidades de cada país. Durante los últimos años, existe una evidente tendencia en diferentes países por fortalecer el sector agrícola, esto se debe a que, es una de las divisiones más importantes para el desarrollo sostenible. En países en vía de desarrollo que emplean la agricultura como su eje principal, el incremento de la productividad en sus cadenas de abastecimiento es un factor elemental para generar progreso. Este incremento se logra con innovación tecnológica y el acceso a nuevos mercados. Es necesario generar estrategias innovadoras y sostenibles para que los sistemas de abastecimiento agrícolas operen correctamente, es aquí la importancia de la modelación matemática para representar los sistemas logísticos y facilitar la toma de decisiones en este sector.

El uso de los modelos de simulación se viene extendiendo en la agricultura y constituye una herramienta para la investigación, así como para productores y asesores técnicos, que ahora pueden definir, en el universo virtual de una computadora, cuál es la mejor práctica de manejo para un cultivo en determinada campaña y sitio productivo (Rodríguez et al., 2018).

El trabajo profesional en la esfera agropecuaria no está exento del desarrollo matemático alcanzado mundialmente, su aplicación a problemas biotecnológicos, la aplicación de técnicas de simulación, entre otros, así lo confirman. Para lograr la formación de especialistas agropecuarios capaces de desplegar su actividad en la producción moderna, se hace necesario organizar la preparación ininterrumpida de los mismos en el campo de las matemáticas, específicamente en la modelación matemática, presente en cada uno de los problemas que pueden presentarse en las

1. Statistical and mathematical modeling in agricultural and agricultural processes.

In the agricultural sector there are complex problems that require the use of tools and technologies for their solution and thus make the agricultural systems work properly, meeting the needs of each country. In recent years, there is an evident trend in different countries to strengthen the agricultural sector, this is because it is one of the most important divisions for sustainable development.

In developing countries that use agriculture as their main axis, increasing productivity in their supply chains is an elementary factor in generating progress. This increase is achieved with technological innovation and access to new markets. It is necessary to generate innovative and sustainable strategies for agricultural supply systems to operate correctly, this is the importance of mathematical modeling to represent logistics systems and facilitate decision-making in this sector.

The use of simulation models has been spreading in agriculture and constitutes a tool for research, as well as for producers and technical advisers, who can now define, in the virtual universe of a computer, what is the best management practice for a crop in a certain campaign and productive site (Rodríguez et al., 2018).

Professional work in the agricultural sphere is not exempt from the mathematical development achieved worldwide, its application to biotechnological problems, the application of simulation techniques, among others, they confirm this. To achieve the training of agricultural specialists capable of deploying their activity in modern production, it is necessary to organize their uninterrupted preparation in the field of mathematics,

investigaciones que realizan.

La modelación es entendida como el proceso mediante el cual un investigador construye un modelo que representa un objeto o sistema real, es una herramienta para resolver determinados problemas. Por lo que tiene gran importancia el uso de los modelos en la rama agropecuaria, para poder establecer relaciones entre variables, por ejemplo, relación entre la dosis de fertilización de un cultivo y su rendimiento, así como optimizar recursos en una tarea agrícola, relacionar los procesos químicos, físicos, mecánicos, biológicos y sociales que ocurren en los agrosistemas, reconociendo las especies y variedades de plantas y animales presentes, con preceptos de conservación y protección, utilizando modelos matemáticos con el auxilio de la computación como herramienta y con el apoyo de la bibliografía necesaria y disponible.

1.1 Modelación Matemática. Fundamentos teóricos

(Ferrando et al., 2017) refieren que es la representación matemática de una realidad o fenómeno donde tienen cabida diferentes elementos que le dan forma, como pueden ser los conceptos matemáticos implicados, las representaciones simbólicas de la realidad, así como los procedimientos matemáticos asociados a su uso.

(Sánchez et al., 2020), los autores precisaron además la manera simplificada en que estos modelos expresan una realidad compleja. Agregaron también que son capaces de equilibrar la necesidad de contemplar todos los detalles de la realidad con la factibilidad de técnicas de solución adecuadas.

Por otra parte, (Karadavut, 2009); (Vela y Vargas, 2009); (Ramírez et al. 2011); (Timothy et al. 2012) y (Calzada et al. 2014) plantearon que los

specifically in mathematical modeling, present in each of the problems that may arise in the investigations they carry out.

Modeling is understood as the process by which a researcher builds a model that represents a real object or system, it is a tool to solve certain problems. Therefore, the use of models in the agricultural branch is of great importance, in order to establish relationships between variables, for example, relationship between the fertilization dose of a crop and its yield, as well as optimize resources in an agricultural task, relate the chemical, physical, mechanical, biological and social processes that occur in agrosystems, recognizing the species and varieties of plants and animals present, with conservation and protection precepts, using mathematical models with the help of computing as a tool and with the support of the necessary and available bibliography.

1.1 Mathematical Modeling. Theoretical fundament

(Ferrando et al., 2017) refer that it is the mathematical representation of a reality or phenomenon where there is room for different elements that give it shape, such as the mathematical concepts involved, the symbolic representations of reality, as well as the associated mathematical procedures. to your use.

(Sánchez et al., 2020), the authors also specified the simplified way in which these models express a complex reality. They also added that they are able to balance the need to contemplate all the details of reality with the feasibility of adequate solution techniques.

On the other hand, (Karadavut, 2009); (Vela and Vargas, 2009); (Ramírez et al. 2011); (Timothy et al. 2012) and (Calzada et al. 2014) stated that recent advances in the modeling of plant growth and development provide the

recientes avances en la modelación del crecimiento y desarrollo de las plantas propician las bases para la obtención de conocimientos sobre el manejo eficiente de los pastos y forrajes como vía para mejorar la productividad animal.

El análisis y detección de las relaciones entre los datos; el establecimiento de suposiciones y aproximaciones en la representación de los problemas y el desarrollo o uso de algoritmos específicos de solución, son elementos que caracterizan estas potentes herramientas.

La importancia de los modelos utilizados radica en que permiten obtener los valores de parámetros que explican un proceso particular y ofrecen una idea de cómo se combinan los diversos fenómenos de la fermentación para controlar el rendimiento global. Los modelos son, además, la base para evaluar el proceso y tienen gran importancia en el diseño del equipamiento y los criterios de control (Sosa et al. 2012).

En las fermentaciones, es una constante que los modelos matemáticos tengan uno o parámetros que los describan y que su valor numérico sea desconocido antes de aplicarlo y no sea medible. Respecto a la última parte, las suposiciones que se realizan son necesarias debido a la complejidad de los procesos microbiológicos, estas suposiciones aunque introducen inexactitud a los modelos respecto a ciertas variables, no inciden considerablemente, por ejemplo, en la descripción de las etapas de crecimiento microbiano u otras variables importantes en los procesos microbiológicos.

1.1.1 Pasos principales para la modelación matemática:

basis for obtaining knowledge on the efficient management of pastures and forages as a way to improve animal productivity.

The analysis and detection of the relationships between the data; the establishment of assumptions and approximations in the representation of problems and the development or use of specific solution algorithms are elements that characterize these powerful tools.

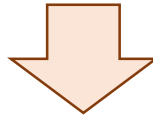
The importance of the models used is that they allow obtaining the parameter values that explain a particular process and offer an idea of how the various fermentation phenomena combine to control overall performance. The models are also the basis for evaluating the process and are of great importance in the design of the equipment and the control criteria (Sosa et al. 2012).

In fermentations, it is a constant that mathematical models have one or parameters that describe them and that their numerical value is unknown before applying it and is not measurable. Regarding the last part, the assumptions that are made are necessary due to the complexity of the microbiological processes, these assumptions, although they introduce inaccuracy to the models with respect to certain variables, do not significantly affect, for example, the description of the growth stages. microbial or other important variables in microbiological processes.

1.1.1 Main steps for mathematical modeling:

Paso/ Step 1
Por lo que se quiere conseguir y los esfuerzos necesarios para lograrlo (¿Por qué desarrollar el modelo y qué nivel de complejidad es apropiado para describir el proceso?)

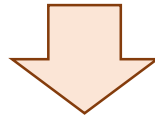
Why do you want to achieve it and the efforts required to achieve it (Why develop the model and level of complexity is appropriate to describe the process?)



Paso/ Step 2

Modelar el sistema en un nivel apropiado de detalle y establecer las suposiciones del mismo (¿Cuáles procesos o fenómenos que pudieran estar incluidos en el modelo?)

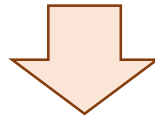
Model the system at an appropriate level of detail and establish its assumptions (What are the processes and phenomena that could be included in the model?)



Paso/ Step 3

Escribir las ecuaciones (Escribir las ecuaciones de balances necesarias para el modelo, así como condiciones iniciales y de contorno).

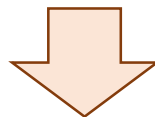
Write the equations (Write the balance equations necessary for the model as well as its initial and boundary conditions).



Paso/ Step 4

Estimar los parámetros y valores apropiados para las variables de operación y los valores iniciales (¿Cómo se puede estimar los valores de los parámetros, son aceptables los valores de la literatura, se pueden determinar experimentalmente?)

Estimate the appropriate parameters and values for the operating variables and the initial values (How can the values of the parameters be estimated, are the literature values acceptable, can they be determined experimentally?)



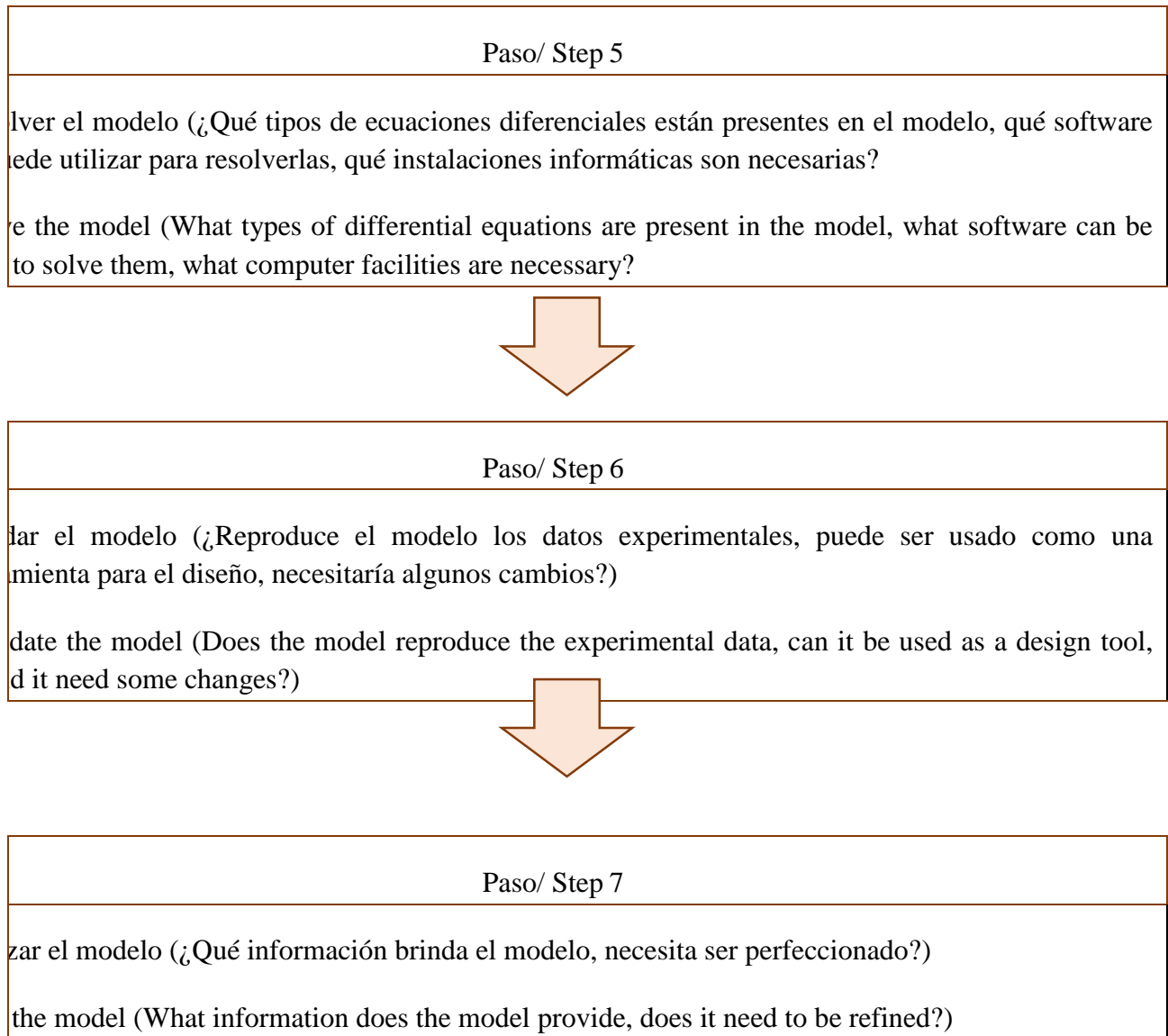


Figura 1: muestra un esquema donde se recogen los pasos principales definidos por Mitchell et al. (2006) para la modelación matemática de un proceso.

Figure 1: shows a diagram where the main steps defined by Mitchell et al. (2006) for the mathematical modeling of a process.

1.1.2 Propiedades de un modelo matemático

- **Simplicidad:** Uno de los objetivos principales de un modelo matemático es simplificar la realidad.
- **Objetividad:** Que no tenga sesgos ni teóricos ni de los prejuicios o ideas de sus

1.1.2 Properties of a mathematical model

- **Simplicity:** One of the main objectives of a mathematical model is to simplify reality.
- **Objectivity:** That it does not have biases or theoretical or prejudices or ideas of its designers.

diseñadores.

- **Sensibilidad:** Que sea capaz de reflejar los efectos de pequeñas variaciones.
- **Estabilidad:** Que el modelo matemático no se altere significativamente cuando hay cambios pequeños en las variables.
- **Universalidad:** Que sea aplicable a varios contextos y no sólo a un caso particular.

Un modelo matemático de crecimiento está compuesto por 3 partes: la primera corresponde a los principios químicos, físicos y biológicos involucrados en el proceso en cuestión, la segunda son las inferencias que se puedan hacer a partir de los datos existentes previamente y la tercera corresponde a las suposiciones que se deban hacer, con bases y criterios válidos.

Los modelos matemáticos para el estudio de los procesos de fermentación tienen, entre sus principales aplicaciones o utilidades el poder correlacionar datos experimentales y así tener una visión más acertada acerca del proceso en cuestión, hacer una predicción cuantitativa del proceso, reducir costos en diseño experimental y de proceso, considerar o no variables que puedan o no afectar el desarrollo experimental y utilizar el modelamiento matemático para escalar procesos realizados a nivel de banco o laboratorio, entre otras.

En este caso se utiliza la modelación matemática, ya que dentro de las características de los microorganismos a emplear como probióticos es de suma importancia determinar su capacidad de crecimiento y monitorear los parámetros cinéticos que permitan producir el preparado con alta concentración a escalas productivas.

Durante décadas, los antibióticos se utilizaron en la

- **Sensitivity:** That it is capable of reflecting the effects of small variations.
- **Stability:** That the mathematical model does not alter significantly when there are small changes in the variables.
- **Universality:** That it is applicable to various contexts and not just to a particular case.

A mathematical model of growth is composed of 3 parts: the first corresponds to the chemical, physical and biological principles involved in the process in question, the second is the inferences that can be made from the previously existing data and the third corresponds to the assumptions to be made, with valid bases and criteria.

Mathematical models for the study of fermentation processes have, among their main applications or utilities, the power to correlate experimental data and thus have a more accurate vision about the process in question, make a quantitative prediction of the process, reduce costs in experimental design and process, consider or not variables that may or may not affect experimental development and use mathematical modeling to scale processes carried out at the bench or laboratory level, among others.

In this case, mathematical modeling is used, since within the characteristics of the microorganisms to be used as probiotics, it is extremely important to determine their growth capacity and monitor the kinetic parameters that allow the preparation to be produced with high concentration at productive scales.

producción animal como aditivos promotores del crecimiento para incrementar los rendimientos productivos. Sin embargo, su uso creó serios problemas (Molina, 2019) y agudizó la aparición de efectos residuales en los alimentos para el consumo humano. Por tales razones, fue necesaria la introducción de nuevas prácticas en las alimentación, por lo que el consumo de alimentos fermentados con bacterias ácido lácticas se ha asociado con una serie de beneficios para la salud que pueden atribuirse a la presencia del microorganismo utilizado como probiótico entre los que se destacan, la modulación de la respuesta inmune y la protección contra microorganismos patógenos, también pueden ejercer un efecto antioxidante y contribuir al aporte de nutrientes tales como vitaminas o mejorar su biodisponibilidad (Marco et al., 2017), estos se han convertido en principales candidatos por sus propiedades y potencialidades incluyendo su uso seguro.

En este sentido, en el Instituto de Ciencia Animal (ICA), (García et al., 2016) aislaron, identificaron y caracterizaron bacterias lácticas, de origen aviar, como candidatas a probiótico. Estos autores encontraron que *Lactobacillus pentosus* LB-31 fue la cepa más promisoría y se evaluaron en ensayos biológicos. Aunque, consideraron que otras cepas identificadas en el estudio, como *Pediococcus pentosaceus* LB-25, pudieran incluirse en probióticos multiespecies, que potencien los efectos benéficos de cultivos de cepas individuales, así como en formulaciones (García et al. 2017).

En la literatura científica existen modelos para describir el crecimiento microbiano entre los cuales se destacan el exponencial, el de Monod, la ecuación logística y el de Gompertz. Sin embargo, su selección depende de la cepa en estudio y sus condiciones de cultivo. Por lo que, la selección de un modelo matemático adecuado es una herramienta útil para obtener de forma rápida los

For decades, antibiotics were used in animal production as growth-promoting additives to increase productive yields. However, its use created serious problems (Molina, 2019) and exacerbated the appearance of residual effects in food for human consumption. For these reasons, it was necessary to introduce new food practices, so the consumption of foods fermented with lactic acid bacteria has been associated with a series of health benefits that can be attributed to the presence of the microorganism used as a probiotic among those that stand out, the modulation of the immune response and protection against pathogenic microorganisms, can also exert an antioxidant effect and contribute to the contribution of nutrients such as vitamins or improve their bioavailability (Marco et al., 2017), these have become in main candidates for its properties and potentialities including its safe use.

In this sense, at the Institute of Animal Science (ICA), (García et al., 2016) isolated, identified and characterized lactic bacteria, of avian origin, as probiotic candidates. These authors found that *Lactobacillus pentosus* LB-31 was the most promising strain and they were evaluated in biological assays. Although, they considered that other strains identified in the study, such as *Pediococcus pentosaceus* LB-25, could be included in multispecies probiotics, which enhance the beneficial effects of individual strain cultures, as well as in formulations (García et al. 2017).

In the scientific literature there are models to describe microbial growth, among which the exponential, the Monod, the logistic equation and the Gompertz stand out. However, its selection depends on the strain under study

parámetros de crecimiento de los microorganismos de interés como las cepas *Lactobacillus* y *Pediococcus*.

Por ello se realiza una modelación matemática partiendo de las variables respuesta, para describir y predecir el crecimiento de las bacterias, que son los objetivos principales del ajuste de modelos matemáticos para el estudio. La finalidad del

ajuste de modelos matemáticos al crecimiento se dirige fundamentalmente a resumir, en tres o cuatro parámetros, las características productivas y lograr su interpretación biológica, en el caso de los modelos no lineales. Igualmente son indicados para evaluar el perfil de respuesta del tratamiento en el transcurso del tiempo, además de estudiar cambios en estos a partir de varias temperaturas.

Los estándares actuales de seguridad y calidad alimentaria sólo pueden ser satisfechos a través de un conocimiento detallado del comportamiento de los microorganismos patógenos durante el ciclo de vida del producto. La microbiología predictiva ha demostrado ser clave en este aspecto. Esta rama intenta describir el comportamiento de un microorganismo bajo unas condiciones ambientales dadas a través de modelos matemáticos (Garre Pérez et al., 2016).

Un modelo microbiológico predictivo, es una expresión matemática que describe el crecimiento, la supervivencia, la inactivación o proceso bioquímico de un microorganismo de origen alimentario. El desarrollo de los modelos matemáticos no solo se basa en encontrar la ecuación que describa el comportamiento de un conjunto de datos sino en determinar modelos precisos y versátiles al mismo tiempo (Salgado, 2013).

and its cultivation conditions. Therefore, the selection of a suitable mathematical model is a useful tool to quickly obtain the growth parameters of the microorganisms of interest such as *Lactobacillus* and *Pediococcus* strains.

Therefore, a mathematical modeling is carried out starting from the response variables, to describe and predict the growth of bacteria, which are the main objectives of the adjustment of mathematical models for the study. The purpose of the

The adjustment of mathematical models to growth is fundamentally aimed at summarizing, in three or four parameters, the productive characteristics and achieving their biological interpretation, in the case of non-linear models. They are also indicated to evaluate the response profile of treatment over time, in addition to studying changes in these from various temperatures.

Current food safety and quality standards can only be satisfied through a detailed knowledge of the behavior of pathogenic microorganisms during the life cycle of the product. Predictive microbiology has proven to be key in this regard. This branch tries to describe the behavior of a microorganism under given environmental conditions through mathematical models (Garre Pérez et al., 2016).

A predictive microbiological model is a mathematical expression that describes the growth, survival, inactivation or biochemical process of a microorganism of food origin. The development of mathematical models is not only based on finding the equation that

1.2 Clasificación de modelos

De acuerdo con la cantidad de datos y el conocimiento dentro de un campo particular, se desarrollan modelos con diferentes niveles de complejidad. La clasificación de los modelos ha sido intentada anteriormente, pero no se pueden hacer delimitaciones definidas, ya que los modelos generalmente poseen características de más de un grupo.

Los modelos de simulación se clasifican en dos grandes grupos: empíricos y mecanicistas. Los primeros son descriptivos, se derivan de datos observados sin

involucrar procesos fisiológicos y tienen escasa capacidad explicativa. Por el contrario, los modelos mecanicistas poseen capacidad explicativa de la fisiología del cultivo. No obstante, dentro de estas clasificaciones existen otras categorías, que de acuerdo a sus características han sido nombradas de diferente forma. Los modelos que estudian las relaciones biológicas para describir el comportamiento de un sistema se les denominan modelos mecanísticos, a diferencia de los modelos empíricos que describen las relaciones matemáticas entre los datos.

Modelos empíricos o descriptivos: los modelos matemáticos que son desarrollados a partir de datos obtenidos experimentalmente, reciben el nombre de modelos empíricos; estos son de gran interés, debido a que describen los datos de crecimiento bajo condiciones específicas. Entre los modelos más representativos de este grupo se encuentra el modelo de Gompertz, el modelo de raíz cuadrada y sus modificaciones. Dichos modelos son utilizados para describir la velocidad de crecimiento y otros

describes the behavior of a data set, but on determining precise and versatile models at the same time (Salgado, 2013).

1.2 Classification of models

According to the amount of data and knowledge within a particular field, models with different levels of complexity are developed. The classification of the models has been tried before, but no definite delimitations can be made, since the models generally have characteristics of more than one group.

Simulation models are classified into two large groups: empirical and mechanistic. The former are descriptive, they are derived from observed data without involve physiological processes and have little explanatory capacity. On the contrary, mechanistic models have the ability to explain the physiology of the crop. However, within these classifications there are other categories, which according to their characteristics have been named differently. Models that study biological relationships to describe the behavior of a system are called mechanistic models, as opposed to empirical models that describe mathematical relationships between data.

Empirical or descriptive models: mathematical models that are developed from experimentally obtained data are called empirical models; These are of great interest, because they describe growth data under specific conditions. Among the most representative models of this group is the Gompertz model, the square root model and their modifications. These models are used to

parámetros en función de condiciones experimentales como la temperatura, el pH, entre otras.

La ecuación de Gompertz modificada se representa mediante un modelo no lineal. La simplicidad y facilidad de uso de esta ecuación ha permitido que sea ampliamente utilizada, por ejemplo para describir las curvas de crecimiento de cultivos indicadores, así como para modelar el crecimiento de microorganismos causantes de deterioro en carnes cocidas empacadas al vacío y para describir la vida útil de productos cárnicos.

Modelos mecanísticos: en cuanto a los modelos mecanicistas se diferencian de los empíricos, debido a que estos parten de una base teórica biológica, la cual obliga al modelo a adaptarse a la realidad biológica mediante una hipótesis determinada, en consecuencia, estos modelos explican con más exactitud los datos experimentales aunque no se ajusten con tanta exactitud como los modelos empíricos a los datos utilizados para la generación del modelo. Dentro de estos modelos se destacan los que predicen la tasa de crecimiento en función de la temperatura o aquellos que describen la velocidad de catálisis enzimática a bajas temperaturas, entre otros (Salvador, 2013).

Modelos estáticos y dinámicos: representan relaciones entre las variables que no se modifican en el tiempo y, por tanto, se conoce su valor final y no su evolución en el tiempo. Los modelos dinámicos describen el modo en el cual el sistema cambia en el tiempo y, por lo tanto, es posible seguir la evolución temporal de cada una de las variables del sistema.

describe the growth rate and other parameters based on experimental conditions such as temperature, pH, among others.

The modified Gompertz equation is represented by a non-linear model. The simplicity and ease of use of this equation has allowed it to be widely used, for example to describe the growth curves of indicator cultures, as well as to model the growth of spoilage microorganisms in cooked vacuum-packed meats and to describe the life useful of meat products.

Mechanistic models: in terms of mechanistic models, they differ from empirical ones, because they start from a biological theoretical basis, which forces the model to adapt to biological reality through a specific hypothesis, consequently, these models explain more accuracy of the experimental data even if they do not fit as closely as the empirical models to the data used for the generation of the model. Among these models, those that predict the growth rate as a function of temperature or those that describe the speed of enzymatic catalysis at low temperatures, among others (Salvador, 2013).

Static and dynamic models: they represent relationships between variables that do not change over time and, therefore, their final value is known and not their evolution over time. Dynamic models describe the way in which the system changes over time and, therefore, it is possible to follow the temporal evolution of each of the system variables.

Deterministic and stochastic models: they

Modelos determinísticos y estocásticos: atribuyen un solo valor a cada variable del sistema. Hacen predicciones para cantidades sin ninguna distribución probabilística asociada, varianza o elemento aleatorio. En los sistemas biológicos y agrícolas son normales las variaciones. Cuando la variación y la incertidumbre alcanzan un nivel alto, se hace recomendable desarrollar un modelo estocástico que dé un valor medio esperado con una varianza asociada. Sin embargo, los modelos estocásticos tienden a ser difíciles de manipular y rápidamente se vuelven muy complejos.

Los modelos cinéticos son aquellos que se desarrollan para explicar el crecimiento de los microorganismos en términos de las variables ambientales tales como la temperatura, el pH o la actividad de agua. Igualmente, pueden ser incluidas otras variables como la atmósfera gaseosa o el potencial redox, la humedad relativa, el contenido de nutrientes y las propiedades antimicrobianas. Estos modelos son útiles al momento de explicar el comportamiento de los microorganismos durante el tiempo de proceso o almacenamiento, sin embargo, son de difícil construcción, debido a que requieren de gran cantidad de datos de recuentos microbianos.

Por otro lado, se puede decir que en la medida que incrementa el tiempo también lo hace la variabilidad, eventualmente hasta el punto en que los modelos cinéticos se sustituyen por modelos de probabilidad. El momento de cambio entre los tipos de modelos se encuentra condicionado por el nivel de confianza que se pretenda, es decir, la probabilidad de fallo o consecuencia de fracaso "riesgo" (T. McMeekin et

al., 2008). Los modelos probabilísticos son comúnmente empleados para estimar los límites de

attribute a single value to each variable in the system. They make predictions for quantities without any associated probability distribution, variance, or random element. Variations are normal in biological and agricultural systems. When the variation and uncertainty reach a high level, it is advisable to develop a stochastic model that gives an expected mean value with an associated variance. However, stochastic models tend to be difficult to manipulate and quickly become very complex.

Kinetic models are those that are developed to explain the growth of microorganisms in terms of environmental variables such as temperature, pH or water activity. Likewise, other variables such as gaseous atmosphere or redox potential, relative humidity, nutrient content and antimicrobial properties can be included. These models are useful when explaining the behavior of microorganisms during the process or storage time, however, they are difficult to construct, because they require a large amount of microbial count data.

On the other hand, it can be said that as time increases, so does variability, eventually to the point where kinetic models are replaced by probability models. The moment of change between the types of models is conditioned by the level of confidence that is sought, that is, the probability of failure or consequence of failure "risk" (T. McMeekin et

al., 2008). Probabilistic models are commonly used to estimate the limits of growth / no growth or production / no production of toxin, for example such models are useful in making

crecimiento/no crecimiento o producción/no producción de toxina, por ejemplo dichos modelos son útiles en la toma de decisiones sobre la formulación, el envasado y almacenamiento de un producto basados en la probabilidad de riesgo (Salvador, 2013).

Otro modelo microbiológico ampliamente utilizado para predecir el crecimiento de los microorganismos es el modelo logístico, el cual emplea los mismos términos para determinar los parámetros cinéticos de crecimiento de la fase de latencia, la velocidad de crecimiento y el tiempo de generación. La ecuación logística es representada por la ecuación (Mitchell et al., 2004):

$$X = \frac{X_m}{1 + \left(\frac{X_m}{X_0} - 1\right) e^{-\mu t}}$$

1.3 Modelos de regresión. Métodos de estimación y bondad de ajuste

En general un modelo matemático es muy útil cuando se quiere descubrir la relación que existe entre una variable dependiente y una o más variables independientes, cuyo objetivo es explicar de manera correcta un fenómeno bajo estudio. Sin embargo, estos se diferencian por el tipo de variables que se analizan, es por ello que resulta prudente conocer que cuando la variable respuesta y la independiente son cuantitativas se emplea un análisis de regresión.

El concepto de regresión hace referencia a la ley experimental o fórmula matemática que traduce la relación entre variables correlacionadas. Generalmente cuando se quiere poner una variable en función de otra (o de otras), se acude al bien

decisiones about the formulation, packaging and storage of a product based on the probability of risk (Salvador, 2013).

Another widely used microbiological model to predict the growth of microorganisms is the logistic model, which uses the same terms to determine the growth kinetic parameters of the lag phase, growth rate, and generation time. The logistic equation is represented by the equation (Mitchell et al., 2004):

$$X = \frac{X_m}{1 + \left(\frac{X_m}{X_0} - 1\right) e^{-\mu t}}$$

2 Regression models. Estimation methods and goodness of fit

In general, a mathematical model is very useful when you want to discover the relationship that exists between a dependent variable and one or more independent variables, the objective of which is to correctly explain a phenomenon under study. However, these differ by the type of variables that are analyzed, which is why it is prudent to know that when the response variable and the independent variable are quantitative, a regression analysis is used.

The concept of regression refers to the experimental law or mathematical formula that translates the relationship between correlated variables. Generally, when you want to put one variable in function of another (or others), you go to the well-known resource of linear regression (simple or

conocido recurso de la regresión lineal (simple o múltiple). Esta función utiliza normalmente el método de mínimos cuadrados y funciona fluidamente desde el punto de vista aritmético.

Hay ocasiones en las que la relación que puede darse entre variables independientes y la variable dependiente no tenga un desarrollo lineal, sino que tengan, por ejemplo, un crecimiento exponencial. En esos casos, el modelo de regresión no lineal entra en juego y permite que obtengamos una aproximación de los valores de la variable dependiente en un entorno no lineal. Tengamos presente que el proceso de una regresión no lineal es más complejo, ya que puede no coincidir el número de parámetros con el de las variables independientes.

Un modelo de regresión es un modelo matemático que busca determinar la relación entre una variable dependiente (Y), con respecto a una o varias variables independientes (X). El modelo busca determinar cuál será el impacto sobre la variable Y ante un cambio en las variables explicativas (X).

Con el nombre de modelos de regresión se incluyen un conjunto de técnicas estadísticas que tratan de explicar cómo se modifica la variable dependiente o resultado, cuando cambian una u otras variables, denominadas independientes o predictoras. Lo que caracteriza en principio a las distintas clases de modelos de regresión es la naturaleza de la variable dependiente; así, con variables continuas la clase de modelos de regresión lineal es la más utilizada (Rodríguez et al., 2018).

Existen varias opciones para estimar un modelo de regresión, entre los que destacan por su facilidad de aplicación e interpretación, el modelo de regresión

múltiple). This function typically uses the least squares method and works arithmetically smoothly.

There are occasions in which the relationship that can occur between independent variables and the dependent variable does not have a linear development, but instead have, for example, an exponential growth. In those cases, the nonlinear regression model comes into play and allows us to obtain an approximation of the values of the dependent variable in a nonlinear environment. Let us bear in mind that the process of a nonlinear regression is more complex, since the number of parameters may not coincide with that of the independent variables.

A regression model is a mathematical model that seeks to determine the relationship between a dependent variable (Y), with respect to one or more independent variables (X). The model seeks to determine what the impact will be on variable Y in the event of a change in the explanatory variables (X).

Regression models include a set of statistical techniques that try to explain how the dependent variable or result is modified, when one or more other variables, called independent or predictors, change. What characterizes the different classes of regression models in principle is the nature of the dependent variable; Thus, with continuous variables, the class of linear regression models is the most used (Rodríguez et al., 2018).

There are several options for estimating a regression model, among which the linear regression model and the logistic regression

lineal y el modelo de regresión logística. Teniendo en cuenta el tipo de variable a estimar (variable dependiente o respuesta) se aplica un modelo de regresión u otro. Simplificando, cuando la variable dependiente es una variable continua, el modelo de regresión más frecuentemente utilizado es la regresión lineal, hay diferentes métodos para la estimación de los parámetros de los modelos lineales y no lineales. El de mínimos cuadrados es el de uso más frecuente para el ajuste de los parámetros en la regresión lineal. Otro tipo de modelos de regresión utilizados, son la regresión no lineal que estiman una serie de modelos matemáticos que pueden ajustarse mejor que un modelo lineal (Peláez, 2016).

Los modelos de regresión logística aplicados a las ciencias de la salud nos permiten el análisis de los resultados en términos explicativos y predictivos, pudiendo conocer la fuerza de los factores de riesgo de una manera independiente y conocer el valor predictivo de cada uno de ellos o bien del modelo en su conjunto.

La ecuación logística es una de las más utilizadas, pues brinda una adecuada aproximación de toda la curva de crecimiento, donde se incluyen la fase de retardo y el cese del crecimiento en las últimas fases de la fermentación, en una sola ecuación (Mitchell y von Meien, 2000). Esta ecuación permite describir el crecimiento de cualquier microorganismo, así como de las poblaciones mixtas y se puede determinar además el contenido de biomasa producto de la fermentación, el cual es equivalente con un por ciento de proteínas.

Diferentes modelos matemáticos han sido utilizados para describir el crecimiento animal. Dado que el crecimiento animal no sigue una tendencia lineal es necesario explorar modelos

model stand out for their ease of application and interpretation. Taking into account the type of variable to be estimated (dependent variable or response), a regression model or another is applied. Simplifying, when the dependent variable is a continuous variable, the most frequently used regression model is linear regression, there are different methods for estimating the parameters of linear and non-linear models. Least squares is the most frequently used for adjusting the parameters in linear regression. Another type of regression model used is nonlinear regression that estimates a series of mathematical models that can be better adjusted than a linear model (Peláez, 2016).

The logistic regression models applied to the health sciences allow us to analyze the results in explanatory and predictive terms, being able to know the strength of the risk factors independently and to know the predictive value of each one of them or of the model as a whole.

The logistic equation is one of the most used, as it provides an adequate approximation of the entire growth curve, which includes the lag phase and the cessation of growth in the last phases of fermentation, in a single equation (Mitchell and von Meien, 2000). This equation allows describing the growth of any microorganism, as well as of mixed populations, and the biomass content of fermentation can also be determined, which is equivalent to one percent protein.

Different mathematical models have been used to describe animal growth. Given that animal growth does not follow a linear trend, it is necessary to explore non-linear empirical

empíricos no lineales que permitan estudiar la relación entre la edad del animal, su velocidad de crecimiento y madurez. Esta información es importante para efectos de investigación y recomendaciones de orden productivo. De igual manera las estimativas de parámetros interpretables biológicamente de una función de crecimiento, asociadas a las características productivas de los animales, pueden ser una alternativa para programas de selección, buscando precocidad con mayor peso y mejor calidad del canal (Noguera et al., 2019).

Los aspectos que se deben tener en cuenta en la selección de modelos estadísticos están dirigidos, fundamentalmente, a los modelos explicativos y dinámicos. Aunque los relativos a estadígrafos, estimación y dójimas de hipótesis en general, están presentes en todos los casos (Rodríguez, et al. 2018):

1. Error estándar de los estimadores de los parámetros (Test t de student), se utiliza para determinar los intervalos de confianza.
2. Coeficiente de variación de los estimadores
3. Límites de confianza de los parámetros,
4. Coeficiente de determinación R²: declara qué proporción de la variación de la variable dependiente es explicada por las variables predictoras.
5. Error estándar de estimación, muestra la desviación normal de los residuos y puede utilizarse para la predicción de nuevas observaciones.
6. Cuadrado medio del error (CME): informa sobre la precisión de las estimaciones
7. Prueba de significación de los parámetros: determina la significación estadística de los

models that allow studying the relationship between the age of the animal, its growth speed and maturity. This information is important for research purposes and for productive recommendations. In the same way, the estimates of biologically interpretable parameters of a growth function, associated with the productive characteristics of the animals, can be an alternative for selection programs, seeking precocity with greater weight and better quality of the carcass (Noguera et al., 2019).

The aspects that must be taken into account in the selection of statistical models are aimed, fundamentally, at explanatory and dynamic models. Although those related to statistics, estimation and hypothesis tests in general, are present in all cases (Rodríguez, et al. 2018):

1. Standard error of the parameter estimators (Student's t test), is used to determine the confidence intervals.
2. Coefficient of variation of the estimators
3. Confidence limits of the parameters,
4. Determination coefficient R²: declares what proportion of the variation of the dependent variable is explained by the predictor variables.
5. Standard error of estimation, shows the normal deviation of the residuals and can be used for the prediction of new observations.
6. Mean square of error (CME): informs about the precision of the estimates
7. Test of significance of the parameters: determines the statistical significance of the model parameters.
8. Aggregate difference or Bias: evaluates the

parámetros del modelo.

8. Diferencia agregada o Sesgo: evalúa la desviación media de los residuos del modelo respecto a los valores observados. El signo del error de predicción promedio expresa si la función examinada sobrestima (-) o subestima (+) el valor de los datos analizados.

9. Análisis del efecto del uso de transformaciones en el modelo.

Los paquetes estadísticos InfoStat, Statgraphics Plus, SPSS statistic, SAS, entre otros llevan implícito en sus algoritmos de análisis la incorporación de estos criterios estadísticos, los que ayudan a los investigadores la selección del modelo de mejor ajuste. Sin embargo, no existe un método único para comparar modelos, sino se pueden utilizar aquellos que describen las condiciones intrínsecas del experimento.

1.4 Modelos matemáticos con mayor aplicación en la producción animal y agrícola en Cuba.

La modelación matemática es una herramienta para estimar los parámetros de los procesos biológicos. En el campo de la producción animal y agrícola, estas técnicas han sido ampliamente utilizadas y permiten el desarrollo de la simulación y el pronóstico de los resultados productivos.

Desde la década de los 80 los modelos empíricos han sido ampliamente usados por muchos investigadores cubanos, con el fin de describir el crecimiento de disímiles cultivares, entre estos trabajos podemos mencionar algunos de los desarrollados en el INCA (Instituto Nacional de Ciencias Agrícolas), donde se realizó una comparación entre diferentes funciones matemáticas para describir el crecimiento de algunos órganos en posturas de café crecidas en vivero; además, se plantea que desde este tiempo se

mean deviation of the model residuals with respect to the observed values. The sign of the mean prediction error expresses whether the examined function overestimates (-) or underestimates (+) the value of the analyzed data.

9. Analysis of the effect of the use of transformations in the model.

The statistical packages InfoStat, Statgraphics Plus, SPSS statistic, SAS, among others, have implicit in their analysis algorithms the incorporation of these statistical criteria, which help researchers to select the best fit model. However, there is no single method to compare models, but those that describe the intrinsic conditions of the experiment can be used.

1.4 Mathematical models with greater application in animal and agricultural production in Cuba.

Mathematical modeling is a tool to estimate the parameters of biological processes. In the field of animal and agricultural production, these techniques have been widely used and allow the development of simulation and forecasting of productive results.

Since the 80s, empirical models have been widely used by many Cuban researchers, in order to describe the growth of dissimilar cultivars, among these works we can mention some of those developed at INCA (National Institute of Agricultural Sciences), where A comparison was made between different mathematical functions to describe the growth of some organs in coffee seedlings grown in a nursery; Furthermore, it is suggested that since this time Cuba has been working on the application of different mathematical

ha venido trabajando en Cuba en la aplicación de diferentes funciones matemáticas para describir el crecimiento de diferentes cultivos, como papa, cítricos, tomate y café; esto permite estimar el valor de la variable en cuestión en cualquier momento, dentro del rango en que se realizó el estudio .

(Torres et al. 2009) desarrollaron una aproximación estocástica del modelo logístico, para estimar el comportamiento productivo de búfalos de agua en Cuba durante la etapa de crecimiento-ceba.

(La O et al. 2013) retomaron la modelación de las curvas de peso vivo en cabritos criollos cubanos, alimentados con pastos y arbustivas naturales en la provincia Granma. Este autor introduce el concepto de elasticidad de los modelos no lineales, logísticos y Gompertz, para lograr mejor interpretación del comportamiento animal.

Cada vez se hacen más necesarios los Modelos Matemáticos y sus aplicaciones en las Ciencias Agrarias, que describen la dinámica de los procesos biológicos para la investigación científica, con énfasis en regresiones no lineales donde el propio desarrollo de la informática y software estadísticos facilitó trabajar las regresiones no lineales. Más reciente (Fernández et al. 2018), exponen la evolución en regresiones no lineales y la propuesta de parámetros iniciales a partir de interpretaciones matemático-biológicas de los mismos, reportan además ejemplos en los modelos de crecimiento animal y vegetal.

functions to describe the growth of different crops, such as potato, citrus, tomato and coffee; This makes it possible to estimate the value of the variable in question at any time, within the range in which the study was carried out.

(Torres et al. 2009) developed a stochastic approximation of the logistic model to estimate the productive behavior of water buffalo in Cuba during the growth-fattening stage.

(La O et al. 2013) took up the modeling of the live weight curves in Cuban Creole kids, fed with grasses and natural shrubs in the Granma province. This author introduces the concept of elasticity of the non-linear, logistic and Gompertz models, to achieve a better interpretation of animal behavior.

Mathematical Models and their applications in Agricultural Sciences are becoming more and more necessary, which describe the dynamics of biological processes for scientific research, with an emphasis on non-linear regressions where the development of statistical computing and software itself facilitated the work of non-linear regressions. More recently (Fernández et al. 2018), they expose the evolution in non-linear regressions and the proposal of initial parameters from mathematical-biological interpretations of the same, they also report examples in the animal and plant growth models.

Tabla1: Ecuaciones empíricas integradas de crecimiento en los procesos microbiano (Mitchell et al. 2004).

	Forma integral
Lineal	$X = kt + X_0$
Exponencial	$X = X_0 e^{\mu t}$
Logístico	$X = \frac{X_m}{1 + \left(\frac{X_m}{X_0} - 1\right) e^{-\mu t}}$
Dos fases	$X = X_0 e^{\mu t},$ $X = X_A \exp\left[\frac{\mu L}{k} (1 - e^{-k(t-t_a)})\right], t \geq t_a$
Gompertz	$X = X_0 e^{-ct - be^{-kt}}$

En el modelo lineal k es una constante de integración y en éste no se describen las fases del crecimiento microbiano, por lo que normalmente es necesario utilizar otras ecuaciones; mientras que el logístico describe una desaceleración del crecimiento y cómo la concentración de biomasa alcanza un valor máximo.

Este último es el modelo más utilizado, pues brinda en una sola ecuación, una adecuada aproximación de toda la curva de crecimiento, incluida la fase de retardo y el cese de éste en las últimas fases de la fermentación. En esta ecuación t_a representa el momento en que los microorganismos dejan la fase de crecimiento exponencial y la velocidad de crecimiento comienza a disminuir, L representa una desaceleración instantánea en la velocidad específica de crecimiento de los microorganismos al entrar en la fase de desaceleración y k es un término de decaimiento exponencial de primer orden que se aplica en toda la fase de desaceleración (Mitchell et al. 2010).

In the linear model k is a constant of integration and in this model the phases of microbial growth, so it is usually necessary to use other equations; while the logistician describes a slowdown in growth and how the biomass concentration reaches a maximum value.

The latter is the most widely used model, since it provides a single equation, a adequate approximation of the entire growth curve, including the lag phase and the cessation of this in the last stages of fermentation. In this equation t_a represents the moment when the microorganisms leave the exponential growth phase and the growth rate begins to decrease, L represents a slowdown instantaneous rate in the specific growth rate of microorganisms when enter the deceleration phase and k is an exponential decay term of first order that applies throughout the deceleration phase

Otro de los aspectos importantes es la descripción de las condiciones medio ambientales, donde los modelos que se obtienen permiten describirlas como una función del tiempo y además ofrecen la respuesta del microorganismo ante estas condiciones. En este sentido, se plantea que la actividad del agua y la temperatura del sustrato varían considerablemente durante el proceso de fermentación y pueden tener efectos muy importantes en el crecimiento y la formación de producto. Es por ello, que es conveniente incorporarlas en los modelos cinéticos de crecimiento (Mitchell et al. 2010).

Muchos modelos empíricos primarios tal como el de Gompertz modificado y el Logístico han sido desarrollados para describir la curva de crecimiento bacteriano en condiciones isotérmicas (Velugoti et al., 2010). (Gibson et al. 1987), introdujeron por primera vez en la microbiología de alimentos estas dos funciones. Ambas ecuaciones describen la cinética de crecimiento mediante ecuaciones diferenciales.

El modelo de Gompertz se basa en los cambios de la velocidad específica de crecimiento. Este es el modelo primario empírico más utilizado y genera una curva asimétrica que simula las fases de latencia, exponencial y estacionaria. El inconveniente es que subestima la velocidad de crecimiento, requiere de datos a lo largo de las fases de latencia, exponencial y estacionaria para una buena predicción (Ramírez, 2011).

Conclusiones

1- Se realizó un estudio, en diferentes ámbitos de los modelos matemáticos, los que permiten llegar a resultados en términos cuantitativos y cualitativos, tomar decisiones y seleccionar alternativas más adecuadas.

(Mitchell et al. 2010).

Another important aspect is the description of environmental conditions, where the obtained models allow them to be described as a function of time and also offer the response of the microorganism to these conditions. In this sense, it is proposed that the activity of the water and the temperature of the substrate vary considerably during the fermentation process and can have very important effects on growth and product formation. That is why it is convenient to incorporate them into growth kinetic models (Mitchell et al. 2010).

Many primary empirical models such as modified Gompertz and Logistics have been developed to describe the bacterial growth curve under isothermal conditions (Velugoti et al., 2010). (Gibson et al. 1987) first introduced these two functions in food microbiology. Both equations describe growth kinetics using differential equations. The Gompertz model is based on changes in the specific growth rate.

This is the most widely used empirical primary model and generates an asymmetric curve that simulates the latency, exponential, and stationary phases. The drawback is that it underestimates the growth speed, it requires data throughout the latency, exponential and stationary phases for a good prediction (Ramírez, 2011).

Conclusions

1- A study was carried out, in different areas of mathematical models, which allow reaching results in quantitative and qualitative terms, making decisions and selecting more appropriate alternatives.

2- Through modeling it is possible to

2- A través de la modelación es posible describir, predecir, evaluar, optimizar y desarrollar procesos biológicos sin la necesidad de pasar por el ámbito experimental.

3- Con los referentes teóricos se establecieron las bases metodológicas de la modelación matemática aplicada a la cinética de crecimiento de las bacterias ácido lácticas en estudio.

4- Con las exigencias actuales sobre calidad alimentaria y seguridad microbiológica requieren de la descripción detallada del comportamiento de la población microbiana donde la moderación del crecimiento de los microorganismos es esencial.

5- Se han presentado los modelos más utilizados actualmente para la descripción de crecimiento microbiano.

6- Las herramientas matemáticas como la modelación resultan eficientes para establecer predicciones en el comportamiento productivo.

describe, predict, evaluate, optimize and develop biological processes without the need to go through the experimental field.

3- With the theoretical references, the methodological bases of the mathematical modeling applied to the growth kinetics of the lactic acid bacteria under study were established.

4- With the current demands on food quality and microbiological safety, they require a detailed description of the behavior of the microbial population where the modeling of the growth of microorganisms is essential.

5- The models most used today for the description of microbial growth have been presented.

6- Mathematical tools such as modeling are efficient to establish predictions in productive behavior.

Bibliografía / References

1. Anguita Izquierdo, (2015), Modelización de curvas de crecimiento a partir del proceso lognormal no homogéneo, Universidad de Granada, páginas 1-78.
2. Baquerizo Crespo, Pagés Díaz, Pereda Reyes, (2016), El modelo de Buswell. Aplicación y comparación. Principales factores que influyen en su aplicación, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (CUJAE) La Habana, Cuba, No 168, Enero 2016: Gestión ambiental. Segunda entrega, ISSN 1900•6241, páginas 1-23.
3. Buelvas Salgado, (2013), Desarrollo y validación de modelos matemáticos predictivos del crecimiento microbiano para estimación de la vida útil en jamón lonchado empacado al vacío, tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín Facultad de Ciencias Agrarias, Departamento de Ingeniería y Alimentos Maestría en Ciencia y Tecnología de Alimentos, Medellín, Colombia, páginas 1-121.
4. Calderón, (2017), Ajuste de un modelo cinético para el crecimiento de *Lactobacillus acidophilus* en la fermentación de un sustrato complejo, fundación universidad de américa facultad de ingenierías departamento de ingeniería química, páginas 1-78.

5. Casals, Guzmán, A. Caylà, (2014), Modelos matemáticos utilizados en el estudio de las enfermedades transmisibles, Rev Esp Salud Pública 2009; 83: 689-695, número (5), páginas 1-9.
6. Castillo Tlapa, Domínguez Mancera, Hernández Beltrán, Martínez Hernández, Cervantes Acosta, Colín Ibarra, Vega Juárez, Kaiser Alarcón, (2008), Modelos matemáticos en la evaluación del crecimiento de vaquillas cruzadas en clima cálido húmedo y su caracterización productiva a primera gestación, Universidad Veracruzana. Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia. Posta Zootécnica Torreón del Molino, XXI Reunión Científica-Tecnológica Forestal y Agropecuaria Veracruz y I del Trópico Mexicano, páginas 1-8.
7. Muñoz, A. Polo, E. Sierra, D. Rueda, (2020), “Modelación matemática en estudio de agrocadenas: una revisión de literatura”, Revista Politécnica, **vol.16**, número (31) pp.110-137, 2020. DOI: 10.33571/rpolitec.v16n31a9.
8. Dr.C. Caridad Walkiria Guerra BustilloI, Dr.C. Magaly Herrera VillafrancaII, Dr.C. Yasser Vázquez Alfonso, Dr.C. Atenaida Beatriz Quintero Bueno, (2014) Contribución de la Estadística al análisis de variables categóricas: Aplicación del Análisis de Regresión Categórica en las Ciencias Agropecuarias, Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, **Vol. 23**, número (1), ISSN -1010-2760, RNPS-0111, páginas 1-6.
9. Fernando, Mamani, (2015), Ajuste de modelos matemáticos de crecimiento de bacterias lácticas en queso tipo paria en condiciones isotérmicas y no isotérmicas, URI: <http://repositorio.unap.edu.pe/handle/UNAP/3344> .
10. García Curbelo, Yanelys; García, Yaneisy; López, Anahí; Boucourt, R., (2005), Probióticos: una alternativa para mejorar el comportamiento animal, Revista Cubana de Ciencia Agrícola, **Vol.39**, número (2), páginas 129-140, ISSN: 0034- 7485.
11. García-Hernández, Pérez-Sánchez, García-Curbelo, Sosa-Cossio, R. Nicoli, (2017), Capacidad de crecimiento, actividad antimicrobiana y susceptibilidad a antimicrobianos de dos cepas de *Pediococcus pentosaceus*, candidatas a probiótico, Cuban Journal of Agricultural Science, **Vol. 51**, número (4), ISSN 2079-3480.
12. Garre Pérez, A.1; Egea Larrosa, J.A.2; Fernández Escámez, P.S.1., (2016), Modelos matemáticos para la descripción del crecimiento de microorganismos patógenos en alimentos, **vol. 9**, páginas 1-4.
13. Gatica Ramírez, (2009), Introducción a los modelos matemáticos de crecimiento con aplicaciones en sistemas biológicos, Desarrollado con apoyo de los proyecto PAPIME: PE101606, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, **vol.1**, páginas 1-158.
14. Gualano, Graieb, Baragatti, Andronic, (2019), MATEMÁTICAS Y CRECIMIENTO BACTERIANO: UN TRABAJO DE LABORATORIO PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO, Eje 3: Interdisciplina y articulación entre

materias, <https://www.researchgate.net/publication/333632137>, a. Ingeniería en Agrobiotecnología; IBB-INTECH, Chascomús, Universidad Nacional de San Martín. b. Instituto de Ciencias de la Salud, Universidad Nacional Arturo Jauretche. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata. páginas 1-9.

15. Gutiérrez Ramírez, Bedoya², Ríos Escobar, (2014), Evaluación de parámetros productivos en cerdos (*Sus scrofa domesticus*) suplementados con microorganismos probióticos nativos, *Journal of Agriculture And Animal Sciences*, **Vol.3**, número (2), páginas 1-8.
16. Hernández^I, Dr.C. F. Soto^{II}, Dr.C. A. Caballero^{III}, (2009), Modelos de simulación de cultivos. Características y usos, **Vol.30**, número (1), páginas 1-9, ISSN 0258-5936.
17. K. C. Mountzouris, P. Tsirtsikos, E. Kalamara, S. Nitsch, G. Schatzmayr, and K. Fegeros, 2006, Department of Animal Nutrition, Agricultural University of Athens, Iera Odos 75, 11855, Greece; and BIOMIN GmbH Industriestrasse 21, 3130 Herzogenburg, Austria, páginas 1-9.
18. Martínez Hernández, (2020), Modelado de las etapas iniciales , tesis para maestro en ciencias en ingeniería química, Centro de Investigación y Estudios de Posgrado Facultad de Ciencias Químicas , Universidad Autónoma de San Luis Potosí Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) CVU: 931339 , distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial- SinDerivadas 4.0 Internacional, páginas 1-151.
19. Mejías Caba, (2018), Modelación matemática para describir el crecimiento y producción de biomasa de la especie *Pennisetum purpureum*, Anuario Ciencia en la UNAH, Vol.16, número (1), páginas 1-19.
20. Obando Bastidas JA, Peña Pita AP, Obando Vargas LN, Franco Montenegro A., (2020), Importancia de los modelos de regresión no lineales en la interpretación de datos de la COVID-19 en Colombia. *Rev haban cienc méd*, 19(Supl.):e_3309. Disponible en: <http://www.revhabanera.sld.cu/index.php/rhab/article/view/3309>
21. Pedraza León, Poveda Ladino, (2020), Estimación de parámetros cinéticos de un cultivo mixto microbiano basado en bacterias acumuladoras de pha, procedentes de un sistema de lodos activados , fundación universidad de américa facultad de ingenierías, programa de ingeniería química bogotá d.c., tesis, páginas 1-161.
22. R. Rodríguez¹, Yadiana Ontivero², Sarai Gómez¹, Yaneisy García¹ and Dailyn Sosa, (2020), Uso de dos aditivos para mejorar el valor nutritivo de ensilajes mixtos de *Cenchrus purpureus* x *C. glaucum* (híbrido OM-22) y *Moringa oleífera*, *Cuban Journal of Agricultural Science*, **Vol. 54**, número (3), 1-13, R. Rodríguez: <http://orcid.org/0000-0001-8254-7509>. Yaneisy García: <http://orcid.org/0000-0002-7055-4880>. Dailyn Sosa: <http://orcid.org/0000-0003-3933-1176>. Sarai Gómez : <https://orcid.org/0000-0001-9248-8143>.
23. Ramírez, (2011), Desarrollo y validación de modelos predictivos dinámicos del crecimiento de *staphylococcus aureus* en productos cárnicos previo al proceso de cocción, Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo, A.C., Tesis de maestría, páginas 1-65.
24. Verena Torres y J. Ortiz, (2005), Aplicaciones de la modelación y simulación a la producción y alimentación de animales de granjas, *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, **Vol. 39**, Número Especial, 1-11.