

NOTA TÉCNICA

## Aplicación de un modelo matemático de operación de embalses para la planificación del riego de sectores agrícolas

### *Application of a Mathematical Model of Operation of Reservoirs for the Planning of the Irrigation of Agricultural Sectors*

Ing. Iosvany Alberto Recio-Villa<sup>I</sup>, Ing. Ana Laura Luis-Winograd<sup>II</sup>, Dr.C. José Bienvenido-Martínez<sup>I</sup>

<sup>I</sup> Universidad Tecnológica de La Habana, Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), CUJAE, Marianao, La Habana, Cuba.

<sup>II</sup> Empresa Aguas de La Habana, La Habana, Cuba.

**RESUMEN.** La planificación de los recursos hídricos superficiales y especialmente del agua para el riego es una de las actividades más importantes dentro del campo de las ciencias agropecuarias. Las alarmas del tangible cambio climático que ocasiona eventos extremos de sequía y escases de agua desafían la inteligencia del hombre para garantizar los alimentos de la sociedad, de ahí que la distribución espacial y temporal de agua para el riego sea una problemática de vital importancia. El presente trabajo muestra la aplicación de un modelo matemático de optimización para obtener una planificación óptima del agua a entregar por un embalse simple a varios sectores agrícolas. En este sentido se aplica el modelo SOES el cual ha sido implementado en el asistente matemático Matlab y mediante el cual es posible planificar las entregas mensuales óptimas a realizar desde un embalse para satisfacer las demandas planificadas de agua para el riego de tres sectores agrícolas con cultivos que compiten por el recurso agua. Como resultados de interés se propone un plan de entregas mensuales de agua para los sectores de riego que minimiza los déficits mensuales y anuales de agua en dichos sectores y garantiza el 85% de la demanda anual de agua para los cultivos que se encuentran dentro de los sectores agrícolas.

**Palabras clave:** embalse, entrega, planificación, optimización, déficit.

**ABSTRACT.** The planning of surface water resources and especially water for irrigation is one of the most important activities in the field of agricultural sciences. The alarms of the tangible climate change that causes extreme events of drought and water shortages, defy the man's intelligence to guarantee the foods of the society, reason why the spatial and temporal distribution of water for the irrigation is a problem of vital importance. The present work shows the application of a mathematical model of optimization to obtain an optimal planning of water to be delivered by a simple reservoir to several agricultural sectors. In this sense, the SOES model is applied, that has been implemented in Matlab mathematical assistant and by means of which it is possible to plan the optimal monthly deliveries from a reservoir to meet the planned water demands for irrigation of three agricultural sectors with crops that compete for water resources. As a result of interest, a monthly water supply plan is proposed for irrigation sectors which minimizes monthly and annual water deficits in these sectors and guarantees 85% of annual water demand for crops that are within the sectors.

**Keywords:** reservoir, delivery, planning, optimization, deficit.

## INTRODUCCIÓN

La planificación de los recursos hídricos superficiales y especialmente del agua para el riego es una de las actividades más importantes dentro del campo de las ciencias agropecuarias. Los embalses son una de las fuentes de agua más comunes que existen en el planeta. La operación de embalses es una especialidad importante en la planificación y administración de los recursos hidráulicos superficiales (Kumar *et al.*, 2006). Una política correcta de operación de embalses para el riego agrícola debe estar encaminada hacia la elaboración de planes de explotación y uso sostenible del recurso agua que permita la mejor distribución posible del agua hacia las zonas de cultivos para satisfacer las necesidades hídricas de los mismos (Sattari *et al.*, 2006). Desde hace muchos años se han venido utilizando la modelación matemática para la planificación del agua para el riego contenidas en los embalses como puede observarse en (Raman & Chandramouli (1996); Jain *et al.* (1998);

Raju & Kumar (1999); Chandramouli *at al.* (2002); Casan *at al.* (2009). Entre los métodos más comunes se encuentran la simulación y las técnicas de optimización.

El presente trabajo se aplica un modelo matemático de optimización para obtener la planificación óptima del agua a entregar por un embalse simple a varios sectores agrícolas. En este sentido se aplica el modelo SOES el cual ha sido implementado en el asistente matemático Matlab y mediante el cual es posible planificar las entregas mensuales óptimas a realizar desde un embalse para satisfacer las demandas de agua planificadas para el riego de tres sectores agrícolas con cultivos que compiten por el recurso. Como resultados de interés se propone un plan de entregas mensuales de agua para los sectores de riego que minimiza los déficits mensuales y anuales de agua en dichos sectores y garantiza el 85% de la demanda anual de agua para los cultivos que se encuentran dentro de los sectores agrícolas.

**MÉTODOS**

A continuación se detalla el modelo matemático de optimización, el cual tienen como variables de decisión, las entregas de agua que realiza el embalse a los sectores agrícolas en cada mes. Se utiliza una función objetivo (*FO*) que consiste en minimizar el costo del déficit total anual de agua en los sectores agrícolas, como puede verse en la ecuación (1).

$$FO = \text{Min} \sum_{sa=1}^{nsa} CDT_{sa} = \sum_{sa=1}^{nsa} \sum_{i=1}^{nm} C_{sa,i} \cdot Def_{sa,i} \tag{1}$$

donde:

- $CDT_{sa}$  : costo del déficit total anual de agua en los sectores agrícolas;
- $Def_{sa,i}$  : déficit del sector *u* en el mes *i*;
- $C_{sa,i}$  : costo por unidad de déficit del sector agrícola *sa* en el mes *i*;
- sa*: subíndice que representa los sectores agrícolas;
- nsa*: cantidad de sectores agrícolas asociados al embalse;
- i*: subíndice que representa los meses;
- nm*: cantidad de meses del período.

Además de la *FO*, el modelo está sujeto a restricciones del embalse, del método de Kritski y Menkel y de los sectores agrícolas. La escala de tiempo empleada por el modelo es mensual, con un periodo de 12 meses y el año hidrológico comienza en el mes de mayo.

**Restricciones típicas del embalse**

La ecuación (2) representa la ecuación de balance del embalse, la cual se modifica empleando las ecuaciones 3, 4,

5 y 6 para obtener la ecuación 7. Todas estas ecuaciones se explican seguidamente.

$$V_i = V_{i-1} + W_i - R_i - P_i - V_{Ti} \tag{2}$$

$$P_i = 0,5 \cdot \theta_i \cdot (V_i + V_{i-1}) \tag{3}$$

$$R_i = \sum_{sa=1}^{nsa} R_{sa} \tag{4}$$

$$A_i = 1 + 0,5 \theta_i \tag{5}$$

$$B_i = 1 - 0,5 \theta_i \tag{6}$$

donde:

- $V_i$  : volumen del agua almacenada en el embalse al final del mes *i*;
- $V_{i-1}$  : volumen del agua almacenada en el embalse al inicio del mes;
- $W_i$  : escurrimiento de agua hacia el embalse en el mes *i*;
- $R_i$  : entrega neta mensual de agua del embalse durante el mes *i*;
- $P_i$  : pérdidas de agua en el embalse durante el mes *i*;
- $V_{Ti}$  : vertimientos de agua en el embalse durante el mes *i*;
- i*: subíndice que representa los meses;
- $R_{sa}$  : entrega neta mensual al sector agrícola *sa*;
- $\theta_i$  : coeficiente de pérdida de agua por unidad de volumen almacenado en el embalse durante el mes *i*;
- $A_i, B_i$ : coeficientes auxiliares por cada mes *i*.

Finalmente la ecuación de balance del embalse puede ser escrita según la ecuación (7).

$$-A_i \cdot V_i + B_i \cdot V_{i-1} + W_i \sum_{sa=1}^{nsa} R_{sa} - V_{Ti} = 0 \tag{7}$$

$$(V_0) - (V_{nm}) = 0 \tag{8}$$

$$Rt - \sum_{i=1}^{nm} R_i = 0 \tag{9}$$

$$Pt - \sum_{i=1}^{nm} P_i = 0 \tag{10}$$

donde:

- $V_{nm}$  : volumen del agua almacenada en el embalse al final del año;
- $V_0$  : volumen del agua almacenada en el embalse al inicio del año;
- Rt*: entrega neta anual del embalse;
- Pt*: pérdida total anual.

La ecuación (3) representa la pérdida de agua mensual del embalse. En (4) se establece que la entrega neta mensual del embalse ( $R_i$ ) es igual a la suma de las entregas netas mensuales ( $R_{sa,i}$ ) de los sectores agrícolas. Las ecuaciones (5) y (6) son coeficientes que surgen al fusionar la ecuación (2) con la (3). La ecuación (8) es una igualdad que obliga a que embalse comience y termine el año hidrológico con el mismo volumen. Las ecuaciones 9 y 10 determinan la entrega neta anual y la pérdida neta anual del embalse.

**Restricciones del método de Kritski y Menkel asociadas con el embalse**

Este grupo lo encabeza la ecuación (11) y las que siguen que se explican a continuación.

$$U \leq \alpha W_m \tag{11}$$

$$-Rt - Pt = 0 \tag{12}$$

$$Y \geq V_a \tag{13}$$

$$\beta_u - \beta_h - \beta_a = 0 \tag{14}$$

$$Y \leq V_u \tag{15}$$

$$V_i \leq V_m + Y \tag{16}$$

$$V_i \geq (Y - \beta_a W_m) + V_m \tag{17}$$

donde:

Y: máximo valor mensual de la diferencia (Vi- Vm), brinda una idea del volumen útil;

α: grado de regulación del embalse;

U: entrega anual bruta del embalse;

W<sub>m</sub>: escurrimiento medio anual;

V<sub>a</sub>: volumen anual del embalse;

V<sub>h</sub>: volumen hiperanual del embalse;

β<sub>u</sub>: capacidad útil relativa;

β<sub>a</sub>: capacidad anual relativa;

β<sub>h</sub>: capacidad hiperanual relativa;

V<sub>m</sub>: volumen muerto del embalse;

V<sub>u</sub>: volumen útil del embalse.

**Restricciones de los usuarios**

Las restricciones de los usuarios se formulan con las ecuaciones (18) y (19).

$$Def_{sa,i} = Dem_{sa,i} - R_{sa,i} \tag{18}$$

$$De_{sa,i} \leq Defmax_{sa,i} \tag{19}$$

donde:

Def<sub>sa,i</sub>: déficit mensual de sector agrícola, Dem<sub>sa,i</sub>: demanda mensual del sector agrícola;

Defmax<sub>sa,i</sub>: máximo déficit mensual permisible de cada sector agrícola en cada mes.

En (18) se define la ecuación de balance mensual para cada sector agrícola conectado al embalse. En la misma aparece el déficit mensual de los sectores agrícolas. La ecuación (19) limita el déficit mensual de cada sector agrícola a un valor máximo determinado, esta restricción garantiza que a cada sector agrícola se le entregue al menos una parte de su demanda mensual.

**RESULTADOS Y DISCUSION**

El embalse Carlos Manuel de Céspedes, en el río Contra-maestre, el segundo en cuanto a capacidad total en la provincia Santiago de Cuba, almacena 243 hm<sup>3</sup> y se emplea para trasvasar agua al embalse Gilbert, para la generación de energía eléctrica y para el riego de zonas agrícolas. Este último uso ha suscitado el interés del presente trabajo. En la Figura 1 se observa un esquema lineal con el embalse céspedes y cuatro zonas hipotéticas de riego sometidas a demandas.

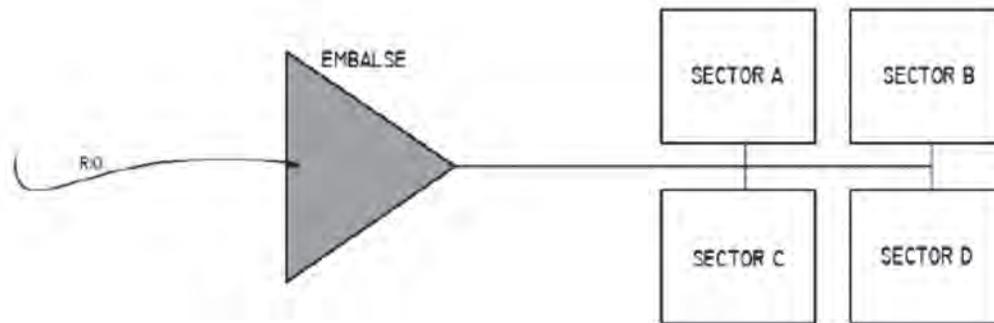


FIGURA 1. Esquema Lineal del embalse Céspedes con los cuatro sectores agrícolas.

El embalse Céspedes tiene un volumen total (V) de 243 hm<sup>3</sup>, un volumen muerto (V<sub>m</sub>) de 30 hm<sup>3</sup>, un volumen útil de 213 hm<sup>3</sup>, el escurrimiento medio anual es de 285 hm<sup>3</sup> con un coeficiente de variación de y se estima que el coeficiente de pérdida de agua por unidad de volumen almacenado en el embalse (θi) es el 2 % del volumen promedio mensual. En el presente estudio se ha estimado que el costo de la unidad de déficit mensual en cada sector agrícola tiene un valor mensual constante, aunque dicho valor es diferente para cada sector agrícola. Para los sectores de riego A, B, C y D se estiman que el costo del déficit mensual de agua tiene un valor de 25 \$/hm<sup>3</sup>, 32 \$/hm<sup>3</sup>, 15 \$/hm<sup>3</sup> y 28 \$/hm<sup>3</sup>. Se ha adoptado como volumen muerto del embalse el correspondiente al volumen mínimo de generación de energía eléctrica cuyo valor es 74,57 hm<sup>3</sup>. También se ha considerado que el máximo déficit mensual permisible de cada usuario será igual al 30% de la demanda del mismo. Con respecto al escurrimiento se ha utilizado el de una probabilidad de 75% considerando un año medio-seco. La distribución mensual de la serie de escurrimiento seleccionada puede ser observada en la Tabla 1.

**TABLA 1. Escurrecimientos (hm<sup>3</sup>/mes) para el embalse Céspedes**

Probabilidad.	Meses												Total
	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	
75 %	26,26	17,45	15,58	17,45	23,38	21,51	13,9	7,11	6,61	7,11	6,1	6,95	169,40

El modelo matemático mostrado con anterioridad ha sido implementado en el asistente matemático MATLAB.

Antes de comenzar el análisis de los resultados de la corrida del modelo se considera conveniente evaluar la calidad de la solución obtenida. En problema en cuestión tiene 48 variables de decisión, resultantes de tener 4 usuarios en un problema con una escala de tiempo mensual, 12 meses. Vale destacar que se cumplen las restricciones del modelo ya que el error máximo en el cumplimiento de las mismas es  $2,1316 \cdot 10^{-13}$ , reflejando una convergencia exitosa del algoritmo, también como prueba de esto MATLAB ha emitido como condición de salida (Exitflag=1), indicando que la solución brindada satisface todas las restricciones implementadas en el modelo. Para obtener estos resultados se consume un tiempo de cómputo de 4 min en una PC Core i5 con 4 Gb de RAM y el algoritmo

implementado en la función FMINCON realizo 34 iteraciones con 1738 evaluaciones de la función objetivo.

En la Tabla 2 se resume el plan de entrega de agua para los sectores agrícolas obtenidos como resultado de la ejecución del modelo. También se muestran las demandas de los usuarios, las entregas óptimas y déficits en cada usuario en valores anuales y totales, todos en hm<sup>3</sup>, así como los costos mensuales y anuales de dichos déficits. El plan de riego propuesto por el modelo satisface el 73,38 % de la demanda anual de todos los sectores agrícolas, este se debe a que la entrega neta anual a dichos sectores agrícolas es 143,46 hm<sup>3</sup> y la demanda de los sectores es de 195,5 hm<sup>3</sup>. El déficit total anual de agua para el riego es de 52,06 hm<sup>3</sup>, este representa un 26,61 % de la demanda anual de agua. El costo del déficit total anual de los sectores agrícolas es de \$ 1201.59.

**TABLA 2. Relación de demandas, entregas, déficit y costo del déficit de los sectores agrícolas**

Usuarios	Parámetro	UM	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	Total
SECTOR A	Demanda	hm <sup>3</sup>	2,05	2,07	1,48	1,66	4,88	1,56	1,30	4,84	6,37	7,10	3,32	2,39	39,00
	Entrega	hm <sup>3</sup>	1,60	1,85	1,30	1,50	4,00	1,40	1,10	3,20	4,70	5,00	2,10	0,48	28,23
	Déficit	hm <sup>3</sup>	0,45	0,22	0,18	0,16	0,88	0,16	0,20	1,64	1,67	2,10	1,22	1,91	10,77
	Costo Def	\$	11,25	5,50	4,50	4,00	22,00	4,00	5,00	41,00	41,75	52,50	30,50	47,65	269,65
SECTOR B	Demanda	hm <sup>3</sup>	2,56	2,58	1,85	2,07	6,09	1,95	1,63	6,05	7,97	8,87	4,14	2,98	48,75
	Entrega	hm <sup>3</sup>	2,00	2,00	1,50	1,64	4,85	1,65	1,25	4,90	6,80	7,00	3,50	2,20	39,29
	Déficit	hm <sup>3</sup>	0,56	0,58	0,35	0,43	1,24	0,30	0,38	1,15	1,17	1,87	0,64	0,78	9,46
	Costo Def	\$	17,92	18,56	11,20	13,76	39,68	9,60	12,16	36,80	37,44	59,84	20,48	24,96	302,72
SECTOR C	Demanda	hm <sup>3</sup>	3,61	3,64	2,61	2,92	8,59	2,75	2,30	8,53	11,23	12,51	5,84	4,21	68,75
	Entrega	hm <sup>3</sup>	2,10	2,50	2,20	1,90	6,59	1,65	1,65	5,53	7,90	9,20	4,50	3,20	48,92
	Déficit	hm <sup>3</sup>	1,51	1,14	0,41	1,02	2,00	1,10	0,65	3,00	3,33	3,31	1,34	1,01	19,83
	Costo Def	\$	22,64	17,16	6,19	15,33	30,06	16,50	9,69	44,93	50,01	49,69	20,16	15,11	297,45
SECTOR D	Demanda	hm <sup>3</sup>	2,05	2,07	1,48	1,66	4,88	1,56	1,30	4,84	6,37	7,10	3,32	2,39	39,00
	Entrega	hm <sup>3</sup>	1,50	1,35	1,10	1,00	3,10	1,00	1,00	3,50	5,25	4,80	1,65	1,90	27,15
	Déficit	hm <sup>3</sup>	0,55	0,72	0,38	0,66	1,78	0,56	0,30	1,34	1,12	2,30	1,67	0,49	11,85
	Costo Def	\$	15,40	20,16	10,64	18,48	49,84	15,68	8,40	37,52	31,33	64,40	46,76	13,72	331,77

Los resultados brindados en la Tabla 4 evidencias que el embalse realiza una alta regulación debido al valor del coeficiente de regulación  $\alpha$ , Otro aspecto a destacar es que tiene una fuerte componente hiperanual reflejada en el valor de  $\beta h$  que hace que su volumen hiperanual ( $Vh$ ) sea superior al volumen anual ( $Va$ ), Esto es una consecuencia directa del coeficiente de variación ( $Cv$ ), la distribución mensual de la serie de escurrimientos mensuales y la entrega que realiza el embalse tratando se satisfacer la demanda de los sectores agrícolas, Céspedes opera con una pérdida anual de agua de 25,95 hm<sup>3</sup> y una entrega neta anual de 143,46 hm<sup>3</sup>, ambas representan el 15,31 % y 84,68 % de la entrega bruta del embalse, respectivamente,

**Tabla 4. Resumen de los resultados obtenidos del embalse**

Algoritmo	$\alpha$	$\beta a$	$\beta h$	$\beta u$	$Va$ (hm <sup>3</sup> )	$Vh$ (hm <sup>3</sup> )	$Vu$ (hm <sup>3</sup> )	$P$ (hm <sup>3</sup> )	$U$ (hm <sup>3</sup> )	$R$ (hm <sup>3</sup> )
FMINCON	0,8219	0,3252	0,4222	0,7474	67,02	120,32	413,0	25,95	169,41	143,46

## CONCLUSIONES

- En el presente trabajo logra implementar en el asistente matemático MATLAB un modelo matemático que permite obtener un plan de entregas óptima de agua a suministrar desde un embalse para el riego de cuatro sectores agrícolas con el propósito de minimizar el costo del déficit total anual de agua en los sectores agrícolas,
- De acuerdo con los resultados obtenidos el embalse Céspedes garantizan 143,46hm<sup>3</sup>/anuales como entrega de agua

a los sectores agrícolas que representa un 73,38 % de la demanda de los mismos, existiendo un déficit anual de agua de 52,06 hm<sup>3</sup> que representa el 26,61 % de la demanda total anual de los usuarios.

- El embalse Céspedes realiza una alta regulación debido al valor mostrado por el coeficiente de regulación ( $\alpha$ ), También tiene una marcada componente hiperanual evidenciando en el valor de  $V_h$ , el cual representa un 56,49 % del volumen útil del embalse y es muy superior al valor de  $V_a$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASAN, J., GONZÁLEZ J., VALDÉS, J.: "Reservoir operation and water allocation to mitigate drought effects in crops: a multilevel optimization using the drought frequency index," *Journal of Water Resources Planning and Management- ASCE*, ISSN: 0733-9496, 135(6): 458-465, 2009.
- CHANDRAMOULI, V., KUPPUSAMY, K, A., MANIKANDAN, K.: "Study on Water Sharing in a Multireservoir System Using a Dynamic Programming-Neural Network Model," *Water Resources Management*, ISSN: 0920-4741, 18(3): 425-438, 2002.
- JAIN, S, K., GOEL M, K., PUSHPENDRA K.: "Reservoir Operation Studies of Sabarmati System, India," *Journal of Water Resources Planning and Management-ASCE*, ISSN: 0733-9496, 124(1): 412-425, 1998.
- KUMAR, D., N., RAJU, K. S., ASHOK, B.: "Optimal Reservoir Operation for Irrigation of Multiple Crops Using Genetic Algorithms," *Journal of Irrigation and Drainage Engineering-ASCE*, ISSN: 0733-9437, 132(2): 123-129, 2006.
- NOORY, H., LIAGHAT, A. M., PARSINEJAD, M., HADDAD, O. B.: "Optimizing Irrigation Water Allocation and Multicrop Planning Using Discrete PSO Algorithm," *Journal of Irrigation and Drainage Engineering-ASCE*, ISSN: 0733-9437, 138(5): 437-444, 2012.
- RAJU, K. S. & KUMAR, N.: "Optimum Cropping Pattern for Sri Ram sagar Project: A Linear Programming Approach," *Journal of Applied Hydrology*, ISSN: 13(1):57-67, 1999.
- RAMAN, H. & CHANDRAMOULI, V.: "Deriving a General Operating Policy for Reservoir Using Neural Network," *Journal of Water Resources Planning and Management- ASCE*, ISSN: 0733-9496, 122(5): 342-347, 1996.
- SATTARI, M. T., KODAL, S., ÖZTURK, F.: "Application of deterministic ISSN: 19(2): 2006.

Recibido: 28/04/2016.

Aprobado: 21/09/2016.

Iosvany Alberto Recio-Villa, Prof., Inv., Universidad Tecnológica de La Habana, Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), CUJAE, Marianao, La Habana, Cuba. Correo electrónico: [recio@cih.cujae.edu.cu](mailto:recio@cih.cujae.edu.cu)

Ana Laura Luis-Winograd. Correo electrónico: [ecana@ahabana.co.cu](mailto:ecana@ahabana.co.cu)

José Bienvenido-Martínez. Correo electrónico: [bienvenido@cih.cujae.edu.cu](mailto:bienvenido@cih.cujae.edu.cu)

